

درس اول : مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های اعداد

انسان در طول تاریخ برحسب نیاز خود مجموعه‌های مختلفی از اعداد را مورد استفاده قرار داده است. برخی از این مجموعه‌ها که در سال‌های قبل با آنها آشنا شدیم به شرح زیر هستند :

مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$

مجموعه اعداد حقیقی که نتوان آنها را به صورت کسر متعارفی نوشت: $\mathbb{Q}' =$ مجموعه اعداد گنگ

مجموعه اعداد حقیقی: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود رابطه زیر مجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به شکل $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ برقرار است. به عبارت دیگر تمام مجموعه‌های اعدادی که تاکنون با آنها آشنا شده‌ایم، زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی هستند. در نتیجه، هر عدد دلخواهی که در نظر بگیریم، باید جایی روی محور اعداد حقیقی داشته باشد؛ چرا که می‌دانیم هر عضو \mathbb{R} جای مشخصی روی محور اعداد حقیقی دارد و همچنین هر نقطه روی این محور نشان‌دهنده یک عدد حقیقی مشخص است.

کار در کلاس

۱-

الف) مجموعه $\mathbb{Q} - \mathbb{R}$ چه نام دارد؟ آن را روی نمودار مقابل هاشور بزنید و دو عضو دلخواه از آن را در ناحیه هاشورخورده بنویسید.

ب) دو عدد گویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشند و آنها را روی نمودار مقابل در محل مناسب بنویسید.

پ) مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی را با نمایش اعضا بنویسید.

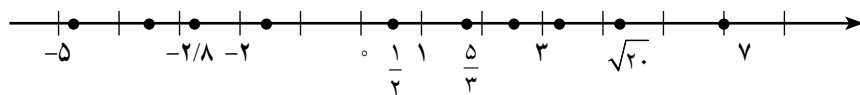
$\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{ \quad \quad \quad \}$

ت) مجموعه $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ چند عضو دارد؟



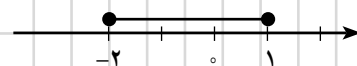
۲- محور زیر را در نظر بگیرید و جای اعداد داده شده را روی آن تعیین نمایید: کدام یک از این شش عدد گنگ هستند؟ زیر آنها خط بکشید

$$2/\sqrt{5}, \frac{-\sqrt{7}}{2}, 6, -4/9, \pi, -\sqrt{2}$$



بازه‌ها

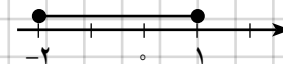
زیر مجموعه دیگری از \mathbb{R} را در نظر می‌گیریم. فرض کنید A مجموعه شامل تمام اعداد حقیقی بین -2 و 1 به همراه خود این دو عدد باشد. یعنی $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$. اگر بخواهیم تمام اعضای A را روی محور نشان دهیم، به صورت روبرو خواهد بود.



زیر مجموعه‌هایی از \mathbb{R} مانند A که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص می‌باشند را «بازه» یا «فاصله» می‌نامیم. بازه‌ها در ریاضیات از اهمیت نسبتاً زیادی برخوردارند و ما هم در برخی از فصل‌های بعدی این کتاب به دفعات با آنها سرو کار خواهیم داشت. از این رو شایسته است که برای نشان دادن آنها از نماد ساده‌تری استفاده شود. در این راستا A را با نماد $[-2, 1]$ نشان می‌دهیم و آن را بازه بسته از -2 تا 1 می‌نامیم. حال اگر نقاط انتهایی این بازه یعنی -2 و 1 را از A حذف کنیم آنگاه مجموعه‌ای مانند $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$ به دست می‌آید که آن را بازه باز بین -2 و 1 می‌نامیم و با نماد $(-2, 1)$ نشان می‌دهیم. به طور خلاصه:

$$A = [-2, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\} \text{ : بازه بسته بین } -2 \text{ و } 1$$

$$B = (-2, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\} \text{ : بازه باز بین } -2 \text{ و } 1$$

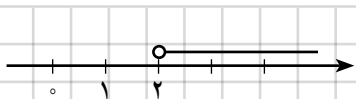


بازه‌های نیم باز هم به روش مشابه تعریف می‌شوند.

فعالیت

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند به طوری که $a < b$ آنگاه جدول زیر را کامل کنید:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
بسته	
نیم‌باز	$[a, b)$
نیم‌باز	$(a, b]$




گاهی تمام اعداد حقیقی مثلاً بزرگ‌تر از ۲ مورد نظر است. به عنوان مثال ممکن است مجموعه جواب یک نامعادله به صورت $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ باشد که نمایش هندسی آن به صورت روبرو است.

در این حالت مجموعه C را در قالب بازه با نماد $(2, +\infty)$ نمایش می‌دهیم که یک بازه باز محسوب می‌شود. توجه داریم که علامت $+\infty$ (بخوانید: مثبت بی‌نهایت) در این جا نشان‌دهنده یک عدد حقیقی نیست بلکه یک نماد ریاضی است که مشخص می‌کند بازه $(2, +\infty)$ از سمت راست بی‌کران است. به همین شکل وجود نماد $-\infty$ در ابتدای یک بازه به معنای بی‌کران بودن آن بازه از سمت چپ می‌باشد.

فعالیت

به ازای عدد دلخواه $a \in \mathbb{R}$ بازه‌های بی‌کران زیر را می‌توان در نظر گرفت. جاهای خالی را پر کنید.

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
.....	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
.....	$[a, +\infty)$	نیم باز

.....	$(-\infty, a)$
.....	\mathbb{R}



مثال: می‌خواهیم اجتماع و اشتراک دو بازه $A = (-1, 4]$ و $B = (2, +\infty)$ را به دست آوریم. نمایش هندسی هر دو بازه را مطابق شکل روی یک محور رسم می‌کنیم.

از روی شکل دیده می‌شود که $A \cup B$ برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر از -1 یعنی:

$$(-1, 4] \cup (2, +\infty) = (-1, +\infty)$$

همچنین با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که $A \cap B$ برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بین ۲ و ۴ و خود عدد ۴ یعنی:

$$(-1, 4] \cap (2, +\infty) = (2, 4]$$

توضیح دهید که چرا $2 \notin A \cap B$.

کار در کلاس

۱- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید:

الف) $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{4}, 2]$ ✓

ب) $-2 \in (-2, 0)$

پ) $0 \in (-2, 0)$

- ت) $-2 \in \{-2, 0\}$ ث) $-1 \in \{-2, 0\}$ ج) $[-1, 2] \subset (-1, 2)$
 چ) $\{0, 1\} \subset [-1, 2]$ ح) $\emptyset \subset (-17, 0]$ خ) $[2, 5) = (2, 5]$
 د) $\sqrt{2} \in (0, 1)$

۲- هر یک از اعداد زیر عضو یکی از بازه‌های داده شده هستند. هر عدد را به بازه نظیر آن وصل کنید.

- | | | | | | |
|----------|-----------------|-----------|----------------|-------------------------------|-----------|
| -۲ | $\sqrt{3}$ | -۵۰۰ | $\frac{-5}{2}$ | $6/0.22 \times 10^{23}$ | $0/2$ |
| $[1, 4]$ | $(-\infty, -4)$ | $[-2, 0)$ | $[3, +\infty)$ | $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$ | $(-3, 2)$ |



جنگل‌های آمازون

آمازون که به ریه‌های زمین مشهور است، جنگل بسیار بزرگی در شمال آمریکای جنوبی است و بدلیل همین وسعت به آن جنگل‌های آمازون گفته می‌شود. حدود ۶۰٪ این جنگل در خاک برزیل قرار دارد، بخش‌هایی از آن هم در کشورهای پرو، اکوادور، گویان، کلمبیا، ونزوئلا، بولیوی و سورینام واقع شده است. در واقع این جنگل بیش از یک‌ونیم برابر خاک کشور ما وسعت دارد. رودخانه آمازون با طول حدود ۶۵۰۰ کیلومتر و پرآب‌ترین رودخانه دنیا که ۵٪ آب شیرین جهان را در خود جای می‌دهد نیز از دل این جنگل عبور می‌کند. نتیجه یک مطالعه بزرگ که مدت ۱۰ سال به طول انجامید، نشان می‌دهد که ۳۹۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ اصله درخت در ۱۶۰۰۰ گونه مختلف در جنگل‌های آمازون وجود دارد. با این حساب سهم هر فرد دنیا از این جنگل چند درخت می‌شود؟! با وجود این تعداد زیاد، مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون یک مجموعه متناهی محسوب می‌شود.

مجموعه یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است که بسیاری از نظریه‌های دیگر ریاضی در یک قرن اخیر بر مبنای آن پایه‌گذاری یا سازماندهی شده‌اند. در سال گذشته با مجموعه و برخی مفاهیم مرتبط با آن آشنا شدیم. در ادامه این فصل مطالب دیگری در این زمینه ارائه می‌شود.

فعالیت

فرض کنید A مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۴ و B مجموعه اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد. الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید.

$$A = \{ \quad \}$$

$$B = \{ \quad \}$$

ب) A چند عضو دارد؟

پ) در مورد تعداد اعضای B چه می‌توان گفت؟

مجموعه‌هایی مانند A که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی می‌باشد را مجموعه‌های متناهی (با پایان) می‌نامیم.

B یک مجموعه متناهی نیست. زیرا نمی‌توان تعداد اعضای آن را با یک عدد بیان کرد. در واقع تعداد اعضای این مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم بزرگ‌تر است. چنین مجموعه‌هایی را مجموعه‌های نامتناهی (بی‌پایان) می‌نامیم.

کار در کلاس

الف) متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. در مورد مجموعه‌های متناهی سعی کنید تعداد تقریبی اعضای هر یک از آنها را بنویسید.

۱- مجموعه اعداد اول یک رقمی

۲- مجموعه انسان‌های روی زمین

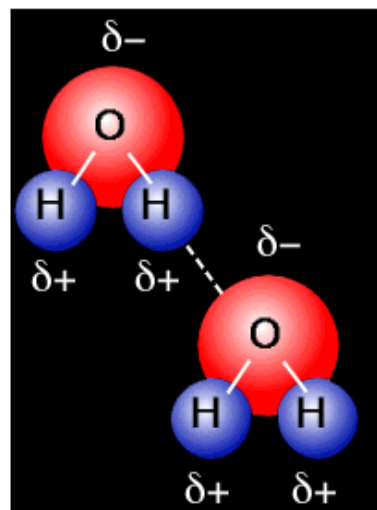
۳- مجموعه اعداد طبیعی فرد

۴- مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان بزرگسال

۵- مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات

۶- مجموعه دانش‌آموزان مدرسه شما

- ۷- مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی
- ۸- مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون
- ۹- مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک
- ۱۰- مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰
- ۱۱- بازه (۱ و ۰)
- ۱۲- مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب



- (ب) دو مجموعه متناهی نام ببرید.
 - (ب) دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که یکی از آنها زیرمجموعه دیگری باشد.
 - (ت) دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که یکی از آنها دقیقاً یک عضو بیشتر از دیگری داشته باشد.
- تعداد اعضای برخی از مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد؛ با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی می‌توان تعداد آنها را به دست آورد.

عدد آوگادرو

در شیمی تعداد 6.022×10^{23} عدد از هر ذره (مولکول یا اتم) را یک مول از آن ذره می‌نامند. برای درک میزان بزرگی این عدد، فرض کنیم تعداد مولکول‌های موجود در یک مول آب که حدود ۱۸ گرم می‌باشد را بتوانیم مولکول به مولکول بشماریم و کار شمردن هر مولکول آن هم یک ثانیه زمان ببرد. در این صورت کار شمارش نزدیک به 2×10^6 میلیون میلیارد سال به طول خواهد انجامید که این زمان حدود یک میلیون برابر عمر جهان می‌باشد. به نظر شما، مجموعه مولکول‌های یک مول مشخص از آب یک مجموعه متناهی است یا نامتناهی؟

فعالیت

- (الف) بین ۰ و ۱ دو عدد گویای دلخواه بنویسید.
- (ب) در بازه (۱ و ۰) چهار عدد گویای دیگر بنویسید و جواب خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.
- (ب) آیا می‌توان بین ۰ و ۱ به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟
- (ت) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازه (۱ و ۰) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
- (ث) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن Q چه می‌توان گفت؟
- (ج) اگر A دارای یک زیرمجموعه نامتناهی باشد، آنگاه A یک مجموعه خواهد بود.

تمرین

- ۱- فرض کنید A مجموعه تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد.
 - (الف) A را با نمایش اعضای آن بنویسید.
 - (ب) A متناهی است یا نامتناهی؟
 - (ب) یک زیرمجموعه متناهی از A بنویسید.
 - (ت) دو زیرمجموعه نامتناهی مانند C و D از A بنویسید به طوری که $C \subset D$.



۲- متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد طبیعی

ب) مجموعه مقسوم علیه‌های مثبت عدد ۳۶

پ) بازه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$

ت) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$

ث) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰

۳- دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه‌ای متناهی باشد.

۴- حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به دست

آورید:

الف) $(-2, 5] \cup (-3, 0)$ ب) $(-\infty, 6] \cap (2, 9)$

پ) $(3, +\infty) \cup (6, 10]$ ت) $(-\infty, 1) \cap [1, +\infty)$

۵- مجموعه $\mathbb{R} - \{3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه

بنویسید.

۶- اگر $A \subset B$ و B مجموعه‌ی متناهی باشد آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟

درس دوم : متمم یک مجموعه

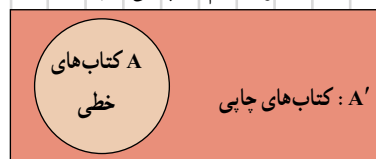
مجموعه مرجع

کتابخانه آیت الله نجفی قم یکی از بزرگ‌ترین کتابخانه‌های جهان اسلام می‌باشد که کتاب‌های نفیس و قدیمی بسیاری را در موضوعات مختلف در خود جای داده است. جدول مقابل اطلاعات مختصری در مورد تعداد کتاب‌های این کتابخانه در اختیار ما قرار می‌دهد.

نوع کتاب	تعداد
کتاب‌های خطی	۳۰۰۰۰ جلد
کتاب‌های چاپی	۲۵۰۰۰۰ جلد
کل کتاب‌ها	۲۸۰۰۰۰ جلد

U : مجموعه تمام کتاب‌های کتابخانه

فرض کنیم U نشان‌دهنده مجموعه تمام کتاب‌های این کتابخانه و A مجموعه کتاب‌های خطی آن باشد. اگر مجموعه شامل بقیه کتاب‌های این کتابخانه که چاپی می‌باشند را با A' نشان دهیم، آنگاه می‌توانیم نمودار مقابل را در مورد کتاب‌های این کتابخانه رسم کنیم. در این مثال U که شامل تمام کتاب‌های کتابخانه می‌باشد را مجموعه مرجع و A' را متمم مجموعه A می‌نامیم.



به‌طور کلی در هر مبحث، مجموعه‌ای که همه مجموعه‌های مورد بحث زیر مجموعه آن باشند را مجموعه مرجع یا مجموعه جهانی می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

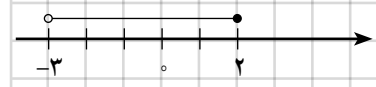
هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subset U$ آنگاه مجموعه $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U می‌باشد که در A نیستند.

به عنوان یک مثال دیگر، مجموعه $A = \{x \mid -3 < x \leq 2\}$ را در نظر بگیرید. آیا می‌توانید اعضای A را روی محور نشان دهید؟ با کمی دقت متوجه می‌شویم که اعضای A به‌طور کامل و دقیق معرفی نشده‌اند و بر حسب این که A را زیر مجموعه‌ای از Q, Z, W, N یا R در نظر بگیریم، به جواب‌های مختلفی خواهیم رسید. به عبارت دیگر در این جا مجموعه مرجع به صراحت مشخص نشده است. به عنوان نمونه اگر مجموعه مرجع را Z در نظر بگیریم، آنگاه A یک مجموعه متناهی شامل پنج عضو به صورت زیر خواهد بود:

$$A = \{x \in Z \mid -3 < x \leq 2\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

ولی اگر \mathbb{R} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم آنگاه A به صورت بازه زیر خواهد بود که مجموعه‌ای نامتناهی می‌باشد:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\} = (-3, 2]$$





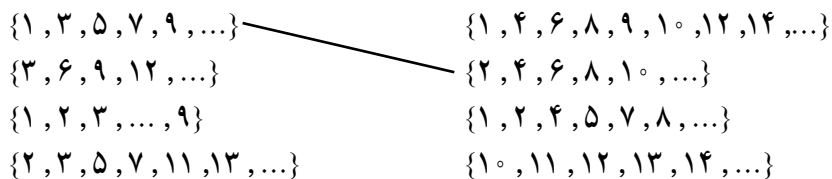
کار در کلاس

۱- اگر U مجموعه شامل تمام استان‌های کشورمان باشد و A مجموعه استان‌های غیر ساحلی، آنگاه A' را با نمایش اعضای آن بنویسید.

۲- فرض کنیم U مجموعه تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری شده کشور باشد و B مجموعه اتومبیل‌های با پلاک فرد. در این صورت A' چه مجموعه‌ای خواهد بود؟

۳- اگر \mathbb{R} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، متمم مجموعه اعداد گویا چه مجموعه‌ای است؟

۴- با فرض آنکه \mathbb{N} مجموعه مرجع باشد، هر مجموعه رابه متمم خودش وصل کنید.



۵- U مجموعه مرجع و A زیرمجموعه دلخواهی از آن می باشد طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

$$\emptyset' = \quad U' = \quad A \cup A' = \quad A \cap A' =$$

آیا این روابط همیشه درست هستند؟ توضیح دهید.

۶- الف) اگر \mathbb{Z} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم آنگاه N' را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

ب) اگر \mathbb{R} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم در این صورت N' را روی محور نمایش دهید.

۷- جمعیت در سن کار یک کشور را به عنوان مجموعه مرجع یعنی U در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم A نشان دهنده مجموعه افراد شاغل این کشور باشد. در این صورت A' برابر مجموعه افراد آن کشور و نسبت $\frac{n(A')}{n(U)}$ بیانگر نرخ آن کشور خواهد بود.

۸- فرض کنیم $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4\}$.
جدول‌های زیر را کامل کنید.

A'	$(A')'$
$\{4, 5\}$	$\{1, 2, 3\}$

A'	B'	$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$A' \cap B'$
$\{ \}$	$\{ \}$	$\{ \}$	$\{ \}$	$\{ \}$

A'	B'	$A \cap B$	$(A \cap B)'$	$A' \cup B'$
$\{ \}$	$\{ \}$	$\{ \}$	$\{ \}$	$\{ \}$

B'	$A - B$	$A \cap B'$
$\{ \}$	$\{ \}$	$\{ \}$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

دیدیم که اگر A یک مجموعه متناهی باشد آنگاه برای نشان دادن تعداد عضوهای آن از علامت $n(A)$ استفاده می‌شود. مثلاً اگر $G = \{2, 3, 5, 7\}$ در این صورت می‌توانیم بنویسیم $n(G) = 4$. در این بخش می‌خواهیم رابطه‌ای برای $n(A \cup B)$ به دست آوریم.

فعالیت

۱- یک تیم کوهنوردی متشکل از ۴ دانش‌آموز و ۳ دانشجو عضو یک مؤسسه غیردولتی طرفدار محیط زیست می‌باشد. اعضای این تیم به‌طور داوطلبانه در روزهای جمعه هر هفته کوه‌های اطراف شهر خود را از وجود زباله پاک‌سازی می‌کنند. اعضای دانش‌آموز این تیم مجموعه $A = \{\text{فرزاد، پوریا، حسین، احمد}\}$ و اعضای دانشجوی آن مجموعه $B = \{\text{داریوش، محسن، رضا}\}$ هستند. همان‌گونه که دیده می‌شود، این دو مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند؛ به عبارت دیگر $A \cap B = \emptyset$.



به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.

الف) اعضای $A \cup B$ که بیانگر اعضای تیم کوهنوردی می‌باشد را بنویسید و جدول زیر را تکمیل کنید.

$A \cup B =$

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cup B)$	$n(A \cap B)$
۴			



ب) تعداد عضوهای $A \cup B$ چه رابطه‌ای با $n(A)$ و $n(B)$ دارد؟ این رابطه را به صورت یک فرمول بنویسید.

ب) تحت چه شرایطی این فرمول برای دو مجموعه دلخواه A و B برقرار است؟

۲-

الف) مجموعه مقسوم علیه‌های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب A و B می‌نامیم. موارد خواسته شده را بنویسید.

مجموعه مقسوم علیه‌های عدد ۲۸ : $A = \{ \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad \} \Rightarrow n(A) = 6$

مجموعه مقسوم علیه‌های عدد ۳۰ : $B = \{ \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad \} \Rightarrow n(B) = 7$

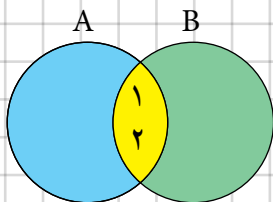
مقسوم علیه‌های مشترک ۲۸ و ۳۰ : $A \cap B = \{ \quad , \quad \} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$

$A \cup B = \{ \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad \} \Rightarrow n(A \cup B) = 11$

ب) جدول مقابل را کامل کنید.

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$
۶			

ب) به نظر شما رابطه‌ای که در فعالیت (۱) به دست آوردید یعنی $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ چرا در این مثال برقرار نیست؟



ت) با تکمیل نمودار مقابل، سعی کنید رابطه درست برای $n(A \cup B)$ را حدس بزنید.

همان طور که دیدیم، در حالت کلی اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

با توجه به نمودار روبرو، در مورد علت درستی این رابطه با دوستان خود بحث کنید.

مثال :

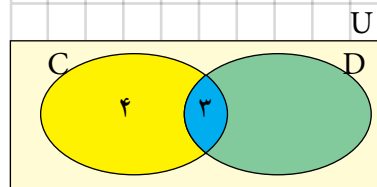
یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم کارتونی و ۸ فیلم درام وجود دارد به طوری که ۳ تا از فیلم‌های کارتونی با مضمون درام می‌باشند. مطلوب است (الف) تعداد کل فیلم‌هایی که یا کارتونی هستند یا درام و یا هر دو (ب) تعداد فیلم‌های غیرکارتونی و غیر درام

روش اول حل: مجموعه شامل تمام فیلم‌ها را با U ، مجموعه فیلم‌های کارتونی را با C و مجموعه فیلم‌های درام را با D نشان می‌دهیم.

$$\begin{aligned} \text{الف) } n(C \cup D) &= n(C) + n(D) - n(C \cap D) \\ &= 7 + 8 - 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

ب) $n(C \cup D)' = n(U) - n(C \cup D) = 21 - 12 = 9$

روش دوم حل: در نمودار وین مقابل، دو مجموعه C و D سطح درون U را به چهار ناحیه جداگانه تقسیم کرده‌اند که عدد مربوط به دوتا از نواحی نوشته شده است. با نوشتن اعداد مربوط به دو قسمت دیگر، می‌توان به قسمت‌های (الف) و (ب) مثال جواب داد.



کار در کلاس

۱- فرض کنید $E = \{a, b, c, d\}$ و $F = \{b, c, d, e, f\}$. با تکمیل جاهای خالی و جدول زیر، درستی رابطه به دست آمده در فعالیت بالا را برای E و F بررسی کنید.

$E \cap F =$

$E \cup F =$

$n(E)$	$n(F)$	$n(E \cap F)$	$n(E \cup F)$

۲- در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند.

تمرین

۱- \mathbb{R} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید.

(الف) $A = [-2, 3)$ (ب) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ (پ) $C = (0, +\infty)$ (ت) $D = (-\infty, 1]$

۲- \mathbb{N} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و

الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

۲) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به دست آورید. C متناهی است یا نامتناهی؟

۳- فرض کنیم $A \subset B \subset U$ که در آن U مجموعه مرجع می‌باشد. آیا بین A' و B' هم رابطه زیر مجموعه بودن برقرار است؟ با ذکر مثال و رسم نمودار و استدلال جواب خود را بررسی کنید.

۴- اگر $n(A) = 15$ ، $n(A \cap B) = 5$ و $n(A \cup B) = 30$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

۵- فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند به طوری که $n(U) = 100$ ،

$n(A) = 60$ ، $n(B) = 40$ و $n(A \cap B) = 20$ مطلوب است

(الف) $n(A \cup B)$ (ب) $n(A \cap B')$ (پ) $n(A' \cap B)$ (ت) $n(A' \cap B')$

۶- در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاتر هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند مطلوب است

(الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرود هستند.

(ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.

۷- در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای مشخص شد که ۷۰ نفر آنها

در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید

داشته‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته

(الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید داشته‌اند.

(ب) فقط از شرکت A خرید داشته‌اند.

(پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید داشته‌اند.

(ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند.



درس سوم : الگو و دنباله

الگو

دنیای اطراف ما سرشار از الگوهای مختلفی است. به عنوان نمونه، پیدایش شبانه روز و تغییر فصول مختلف سال جلوه‌ای از الگوی حاکم بر طبیعت است. از سوی دیگر نظم و قانونمندی‌های موجود در یک الگو به خودی خود برای ما جذاب است. چه بسا ممکن است طرح‌های روی یک گل آفتابگردان، شکل‌های هندسی روی یک سطح کاشی کاری شده و یا ماریچ‌های روی میوه آناناس توجه شما را به خود جلب کرده باشند. به طور کلی می‌توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد می‌باشد که ممکن است تکرار شونده یا رشد کننده و یا ترکیبی از این دو باشد.

ریاضیات به عنوان ملکه علوم، یکی از رسالت‌های مهم خود را مدل‌سازی کردن پدیده‌های طبیعی و بی‌بردن به الگوهای نهفته در آنها می‌داند. اهمیت این موضوع به قدری است که برخی از ریاضیدانان معتقدند که ریاضی عبارتست از علم مطالعه الگوها. در این بخش برخی الگوهای هندسی و نیز الگوهای عددی متناظر با آنها مورد بررسی قرار می‌گیرند.

مثال :

شکل‌های مقابل و تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته در هر یک از آنها را مورد توجه قرار دهید. به عنوان مثال ملاحظه می‌شود که، تعداد چوب کبریت‌های شکل سوم برابر ۱۱ می‌باشد. در این جا برای خلاصه‌نویسی از نمادگذاری خاصی استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم $a_3 = 11$ (می‌خوانیم : a اندیس ۳ برابر ۱۱). در واقع a_1, a_2, a_3 و متغیرهای اندیس‌دار a_n نامیده می‌شوند که مقادیر آنها به ترتیب ۵، ۸ و ۱۱ می‌باشد. به این اعداد جملات الگو هم گفته می‌شود. ۵ جمله اول آن، ۸ جمله دوم و به همین ترتیب الی آخر.

a_1	a_2	a_3
۵	۸	۱۱

با این نمادگذاری، a_n نشان‌دهنده تعداد چوب کبریت‌های شکل دهم و a_n بیانگر تعداد چوب کبریت‌های شکل n ام خواهد بود. a_n را جمله عمومی الگو می‌نامیم، چرا که ضابطه a_n در واقع ساختار جملات الگو را مشخص می‌کند و به کمک آن می‌توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد. به عبارت دیگر، در اختیار داشتن جمله عمومی یک الگو به معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگو می‌باشد. به نظر شما در الگوی بالا حاصل a_1 و a_n را چگونه می‌توان به دست آورد؟

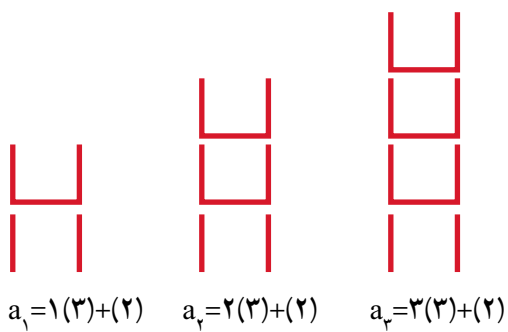


۱ - در سال‌های گذشته با متغیرهایی مثل x, y و z سروکار داشتیم که اسم آنها تک حرفی بود؛ در حالی که نام متغیرهای اندیس‌دار

که در این جا به کار می‌بریم، دو بخشی است. پس تفاوت این دو نوع متغیر، تنها در شکل نامگذاری آنهاست و از نظر ماهیت، تفاوتی با هم ندارند.

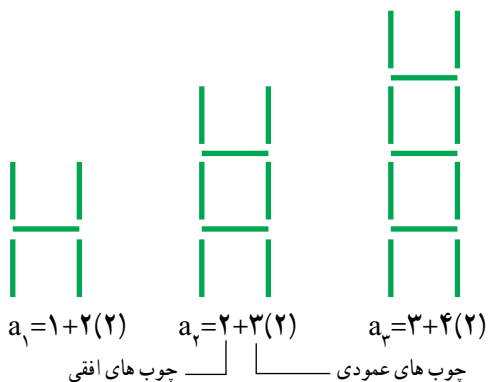
فعالیت

۱- آیدا برای به دست آوردن مقدار a_n در مثال بالا، شکل های الگورا به صورت روبرو در نظر گرفت. به کمک این روش، مقدار a_1 و a_n را به دست آورید.



$a_1 =$ $a_n =$

۲- آيسا روش ديگري را به كار برد. او تعداد چوب كبريت هاي افقي و عمودي در هر شكل را به طور جداگانه مورد توجه قرار داد تا بتواند به مقدار a_n دست يابد. مقدار حاصل براي a_n از اين روش را در جاي مشخص شده بنويسيد.



$a_1 = 1 + (1 + 1)2$ $a_n =$

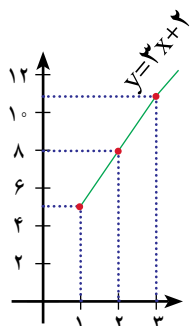
۳- آيا شما راه ديگري براي به دست آوردن مقدار a_n سراغ داريد؟

۴- همان طور که در قسمت های الف و ب دیدیم، آیدا و آيسا مقدار a_n را به ترتيب به صورت های $a_n = 3n + 2$ و $a_n = n + (n + 1)(2)$ به دست آوردند. جواب آيسا را ساده کنيد تا به شکل جواب آيدا در آيد.

۵- به کمک رابطه $a_n = 3n + 2$ تعداد چوب كبريت هاي شكل بيستم را بيابيد.

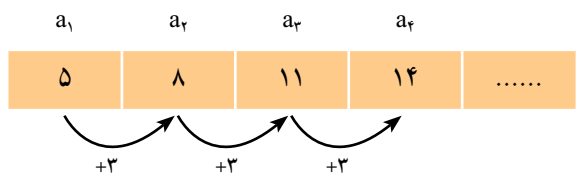
۶- با استفاده از رابطه $a_n = 3n + 2$ مشخص کنيد که چندمين شکل در الگوي بالا داراي ۷۷ قطعه چوب كبريت است.

n	a_n	(n, a_n)
۱	۵	(۱, ۵)
۲	۸	(۲, ۸)
۳	۱۱	(۳, ۱۱)
۴	۱۴	(۴, ۱۴)
.	.	.
.	.	.
.	.	.



الگوی خطی

در الگوي مثال قبل دیدیم که جملات آن به طور ثابت ۳ واحد، ۳ واحد افزایش می یابند. چنین الگوهایی که در آنها اختلاف هر دو جمله متوالی عددی ثابت می باشد را الگوهای خطی می نامیم. برای پی بردن به دلیل این نام گذاری، ستون سوم جدول مقابل را در نظر می گیریم. اگر این نقاط را روی صفحه مختصات مشخص کنیم، همگی آنها بر روی خط $y = 3x + 2$ قرار می گیرند. به عبارت دیگر مختصات تمام این نقاط در معادله خط گفته شده صدق می کند.



شباهت بین معادله خط یعنی $y=3x+2$ و جمله عمومی الگو یعنی $a_n=3n+2$ اتفاقی نیست. عدد ۳ که در واقع اختلاف بین جملات متوالی الگو بود، در معادله خط به عنوان شیب خط ظاهر شده است که این مطلب نیز همواره درست است.

به طور کلی الگوهایی که جمله عمومی آنها به صورت $t_n=an+b$ می باشد را الگوهای خطی می نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

دیدیم که اگر $t_n=an+b$ جمله عمومی یک الگوی خطی باشد آنگاه میزان تغییر جملات متوالی این الگو برابر a خواهد بود. به عبارت دیگر، اختلاف هر دو جمله متوالی در این الگوی خطی برابر ضریب n می باشد.

مثال :

C_n جمله عمومی یک الگوی خطی است که در آن $C_4=17$ و $C_10=41$. در این صورت حاصل C_n را مشخص کنید.

حل : چون الگوی موردنظر یک الگوی خطی است، می توانیم فرض کنیم $C_n=an+b$. پس داریم :

$$\begin{cases} C_4 = 17 \Rightarrow a(4) + b = 17 \\ C_{10} = 41 \Rightarrow a(10) + b = 41 \end{cases}$$

$$6a = 24 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 1$$

پس $C_n = 4n + 1$

کار در کلاس

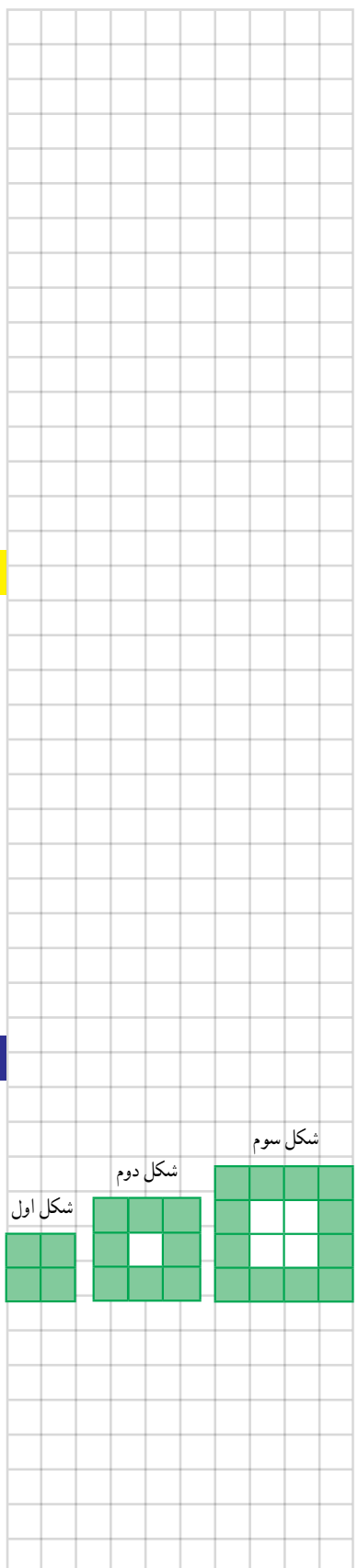
۱- شکل بعدی را در الگوی مقابل رسم کنید و جدول را کامل نمایید.

n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
b_n : تعداد مربع های رنگی	۴	۸
رابطه بین b_n و n	$b_1=4$	$b_2=$

۲- با توجه به شکل ها و یا جدول حاصل، مقدار b_n را حدس بزنید.

۳- توضیح دهید که چرا این الگو یک الگوی خطی محسوب می شود.

۴- با توجه به میزان افزایش جملات الگو، مقدار a در رابطه $b_n=an+b$ کدام است؟



۵- باتوجه به قسمت قبل و مقدار b_n که برابر ۴ می باشد جاهای خالی را در رابطه مقابل پر کنید.
 $b_n = 4n + \square$

۶- آیا رابطه $b_{100} = 400$ درست است؟

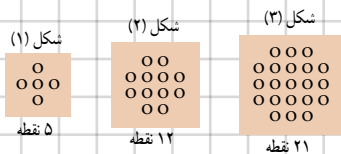
۷- شکل شماره ۲۵۰ دارای چند مربع رنگی است؟

۸- در چه مرحله‌ای از الگوی بالا، تعداد مربع‌های رنگی برابر ۱۴۴ می باشد؟

فعالیت

۱- در الگوی مقابل، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید.

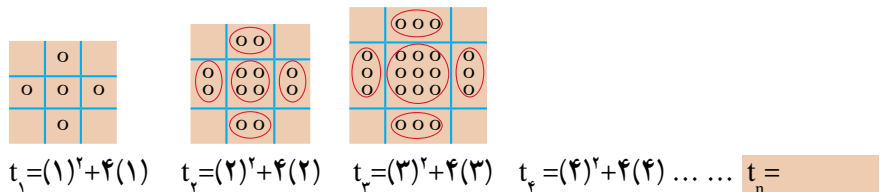
n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
t_n : تعداد نقطه‌ها	۵	۱۲	۲۱
رابطه بین n و t_n	$t_1 = 5$	$t_2 =$



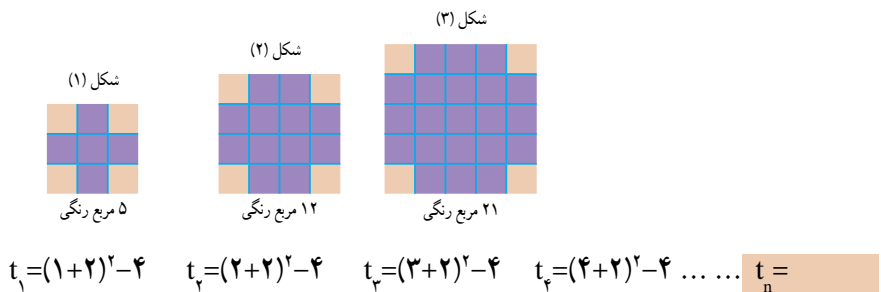
۲- آیا این الگو یک الگوی خطی است؟ چرا؟

۳- آیا می‌توانید حاصل t_n را به دست آورید؟

۴- امیررضا برای یافتن جمله عمومی این الگو، مجموعه نقاط هر شکل را به صورت زیر دسته‌بندی کرد. از شکل‌های امیررضا کمک بگیرید و مقدار t_n را بیابید.



۵- امیرمحمد نگاه دیگری به مسئله داشت. او برای هر شکل این الگو، شکل دیگری را به صورت روبرو نظیر کرد. با استفاده از این شکل‌ها مقدار t_n را بنویسید.



۶- نشان دهید که دو مقدار به دست آمده برای t_n در دو قسمت قبلی، برابر هستند.

۷- آیا شما روش دیگری برای یافتن t_n می‌شناسید؟ پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

کار در کلاس

الگوی مقابل را در نظر بگیرید.

- ۱- دو سطر بعدی الگو را بنویسید. آیا تساوی‌های حاصل درست می‌باشند؟
- ۲- حدسی را درباره این الگو ارائه دهید و حدس خود را با کلمات بیان کنید.
- ۳- حدس خودتان را با نمادهای جبری بنویسید.
- ۴- آیا می‌توانید حدس خود را در حالت کلی ثابت کنید؟

$$1^2 + 1 = 2^2 - 2$$

$$2^2 + 2 = 3^2 - 3$$

$$3^2 + 3 = 4^2 - 4$$

$$4^2 + 4 = 5^2 - 5$$

$$\dots = \dots$$

$$\dots = \dots$$

دنباله

در بخش قبل برای هر الگوی هندسی داده شده، یک الگوی عددی نظیر کردیم. به عنوان نمونه در فعالیت قبل، تعداد نقاط مربوط به شکل‌های متوالی الگو به صورت زیر بود:
 $5, 12, 21, 32, 45, \dots$

چنین الگوهای عددی که در آن تعدادی عدد پشت سرهم قرار می‌گیرند را یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.

مشابه صفحات قبل، جمله اول این دنباله را با t_1 ، جمله دوم را با t_2 و به همین ترتیب جمله n ام یا جمله عمومی آن را با t_n نمایش می‌دهیم. پس:

$$t_1 = 5, t_2 = 12, t_3 = 21, \dots, t_n = n^2 + 4n, \dots$$

قابل ذکر است که این دنباله یک دنباله درجه ۲ نامیده می‌شود؛ زیرا جمله عمومی آن یک چند جمله‌ای درجه دوم است.

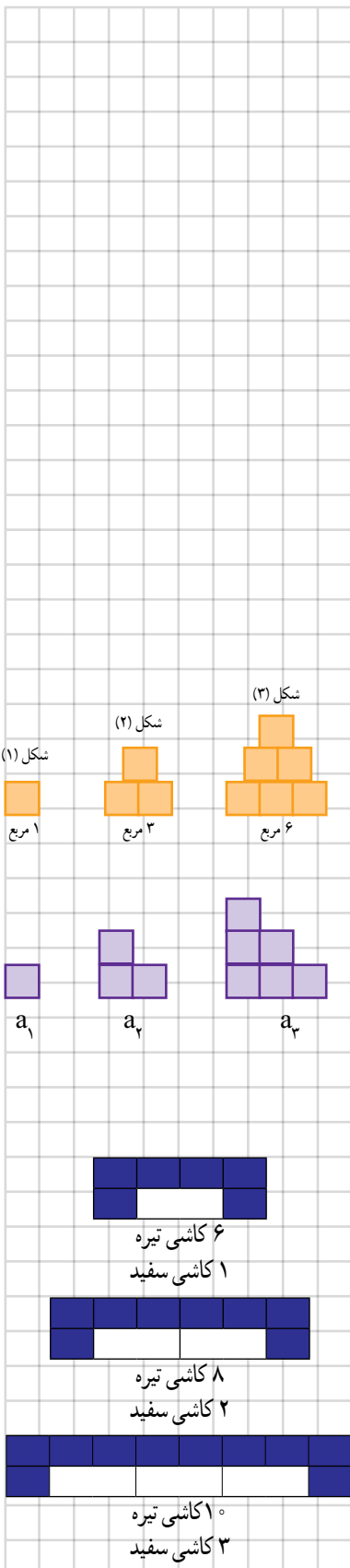
کار در کلاس

۱- الگوهای عددی زیر همگی مثال‌هایی برای دنباله محسوب می‌شوند. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید. همچنین در شماره‌های مشخص شده، سعی کنید جمله عمومی دنباله را حدس بزنید.

الف) $-1, -2, -3, -4, \square, \square, \square, \dots, t_n = -(n+1), \dots$

ب) $5, 18, 31, 44, \square, \square, \square, \dots$

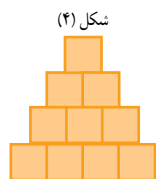
پ) $1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \square, \square, \square, \dots, \square, \dots$



- (ت) $-2, 1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \square, \square, \square, \dots$
- (ج) $1, 4, 9, 16, \square, \square, \square, \dots, \square, \dots$
- (چ) $1, 2, 4, 7, \square, \square, \square, \dots$
- (ح) $0/1, 0/01, 0/001, 0/0001, \square, \square, \square, \dots, \square, \dots$
- (خ) $3, 1, 4, 1, 5, \square, \square, \square, \dots$
- (د) $-1, 8, -27, 64, \square, \square, \square, \dots, \square, \dots$
- (ر) $1, 1, 2, 3, 5, 8, \square, \square, \square, \dots$

۲- جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد جاهای خالی را پر کنید.

- (الف) $a_n = n^2 - 1$: $0, 3, \square, 15, 24$
- (ب) $b_n = -n + 4$: $3, 2, 1, 0, \square, -2$
- (ج) $c_n = -13 + 2n$: $-11, \square, -7, \square, -3$



۳- الگوی مقابل را در نظر بگیرید.

(الف) تعداد مربع‌ها در الگو را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.
(ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است؟ چرا؟

(ج) شکل‌های الگوی بالا را به صورت مقابل تبدیل می‌کنیم.

با دقت در تصویر زیر سعی کنید مقدار a_n را بر حسب n به دست آورید.

(د) به کمک مرحله قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n =$$

تمرین

۱- به الگوی مقابل توجه کنید.

(الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیره آن را مشخص کنید.

(ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید.

(پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.

(ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟

(ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چندتا است؟

۲- جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

(الف) $a_n = 4n$ (ب) $b_n = 3n + 1$ (پ) $c_n = n^2 + 2$ (ت) $d_n = n^2 + n$

۳- برای دنباله درجه دو زیر یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله عمومی دنباله را بیابید.

۵, ۸, ۱۳, ۲۰, ۲۹, ...

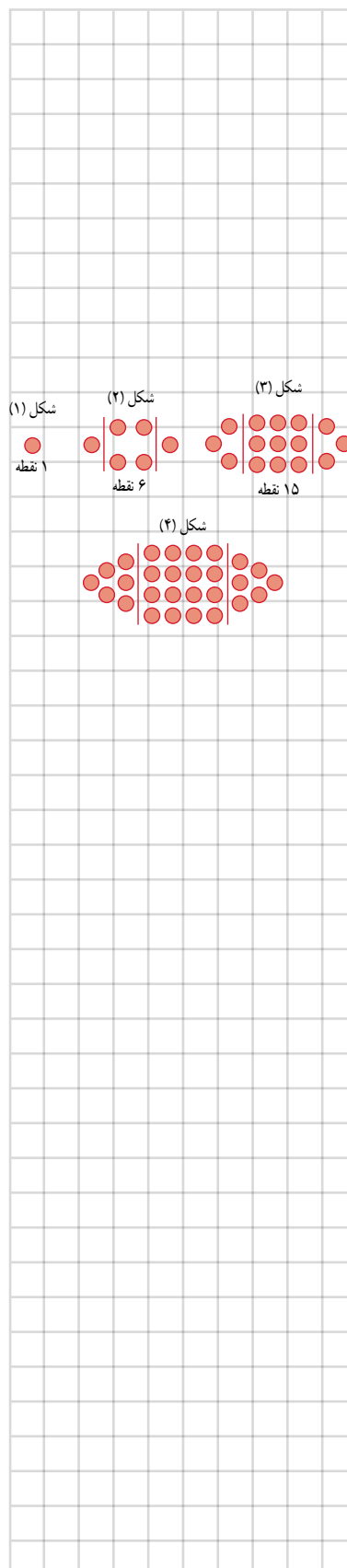
۴- الگوی مقابل را در نظر بگیرید.

(الف) شکل بعدی را رسم کنید و سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.

(ب) جمله عمومی الگو را بیابید.

(پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

۵- آیا هر الگوی عددی لزوماً یک دنباله است؟ توضیح دهید.



درس چهارم : دنباله‌های حسابی و هندسی

دنباله حسابی

در صفحات قبل، مثال‌هایی از الگوهای عددی خطی ارائه شد. نام دیگر این گونه الگوهای عددی، دنباله‌های حسابی است. به عبارت دیگر

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می‌گویند.

فعالیت

۱- جملات یک دنباله حسابی را بنویسید که جمله اول آن $a=4$ و قدرنسبت آن $d=3$ باشد.
 $4, 7, 10, \square, \square, \square, \dots$
 دنباله حسابی دیگری با جمله آغازین ۴ و قدرت نسبت ۳ نمی‌توان نوشت. در واقع هر دنباله حسابی با مشخص بودن جمله اول (a) و قدر نسبت آن (d) کاملاً مشخص می‌شود.



۲- سال‌های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزاره سوم میلادی به بعد بصورت زیر است که جملات یک دنباله حسابی می‌باشند.

$2000, 2004, 2008, 2012, 2016, 2020, \dots$

الف) جمله اول و قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید. $a = \square, d = \square$

ب) نهمین دوره المپیک در این هزاره در چه سالی برگزار خواهد شد؟

پ) با تکمیل جدول زیر، جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_n	t_n
۲۰۰۰	$2000+(1)(4)$	$2000+2(4)$	$2000+3(4)$	$2000+(...)(4)$	$2000+(...)(4)$

ت) بیست و چهارمین دوره المپیک در هزاره سوم میلادی در چه سالی برگزار خواهد شد؟

$t_{24} = ?$

۳- با تکمیل جدول زیر، سعی کنید ساختار کلی جمله عمومی یک دنباله حسابی را به دست آورید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_n
a	a+d	a+2d	a+(3)d			a+(...d)

\curvearrowright $+d$ \curvearrowright $+d$ \curvearrowright $+d$

همان طور که مشاهده شد،

جمله nام یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدر نسبت d به صورت $t_n = a + (n-1)d$ می باشد.

کار در کلاس

۱- در دنباله های حسابی زیر با مشخص کردن قدر نسبت، سه جمله بعدی را بنویسید و سپس جمله عمومی هر کدام را به دست آورید.

الف) $5, 10, 15, 20, \square, \square, \square, \dots$, $d =$, $a_n =$

ب) $1, 3, 5, 7, \square, \square, \square, \dots$, $d =$, $b_n =$

پ) $5, 9, 13, 17, \square, \square, \square, \dots$, $d =$, $c_n =$

ت) $13, 7, 1, -5, \square, \square, \square, \dots$, $d =$, $d_n =$

۲- A و B دو شرکت عرضه کننده سیم کارت های تلفن همراه با شرایط زیر هستند.

سیم کارت های شرکت B
 هزینه ثابت ماهانه: ۳۰۰۰ تومان
 هزینه هر دقیقه مکالمه: ۲۰ تومان

سیم کارت های شرکت A
 هزینه ثابت ماهانه: ۲۰۰۰ تومان
 هزینه هر دقیقه مکالمه: ۳۰ تومان



فرض کنیم a_n نشان دهنده هزینه کل n دقیقه مکالمه ماهانه از طریق سیم کارت شرکت A و b_n هزینه مشابه برای استفاده از سیم کارت شرکت B باشد.

الف) مقدار a_n و b_n را بر حسب n بنویسید.

ب) جدول زیر را کامل کنید.

n : زمان مکالمه ماهانه (دقیقه)	۰	۴۰	۸۰	۱۲۰	۱۶۰
a_n : هزینه سیم کارت A	۲۰۰۰	۳۲۰۰
b_n : هزینه سیم کارت B	...	۳۸۰۰



پ) آیا a_n و b_n هر کدام می‌توانند جمله عمومی یک دنباله حسابی باشند؟ چرا؟
 اگر جواب مثبت است، قدرنسبت هر یک را مشخص کنید.
 ت) سارا در هر ماه حدود یک ساعت و فاطمه ماهانه تقریباً 15° دقیقه با تلفن همراه مکالمه می‌کنند. به هر یک از آنها کدام سیم کارت را پیشنهاد می‌کنید؟ چرا؟

مثال :

در دنباله حسابی زیر جمله شانزدهم را به دست آورید ... ۴, ۱۱, ۱۸, ۲۵,
 حل : آرتین و آرکان این مثال را به روش‌های زیر حل کرده‌اند. شما کدام روش را می‌پسندید؟

روش آرتین

$$t_n = a + (n-1)d$$

$$t_{16} = a + (16-1)d$$

$$= 4 + (15)(7)$$

$$= 109$$

روش آرکان

$$t_n = dn + \square$$

$$t_n = 7n + \square$$

$$t_1 = 7(1) + \square$$

$$4 = 7 + \square \Rightarrow \square = -3$$

$$t_n = 7n - 3$$

$$t_{16} = 7(16) - 3$$

$$t_{16} = 109$$

کار در کلاس

۱- از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت، جمله بیست و یکم را بیابید.

الف) ۳, ۱۰, ۱۷, ۲۴, ...

ب) ۱, ۲, ۴, ۸, ...

پ) ۱۰, ۷, ۴, ۱, ...

ت) $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots$

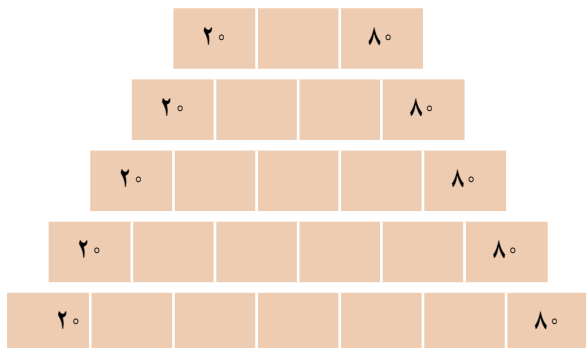
۲-

الف) بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند.
 در این حالت می‌گوییم بین ۱۸ و ۶۲ سه واسطه حسابی درج کرده‌ایم.
 حل : قدرنسبت را به دست آورید و جدول را پر کنید.

$$\begin{cases} t_1 = 18 \\ t_5 = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 18 \\ a + 4d = 64 \end{cases} \Rightarrow d =$$

t_1				t_5
۱۸				۶۲

ب) بین 2° و 8° به تعداد مشخص شده در هر مورد واسطه حسابی درج کنید.



ب) واسطه حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

ت) واسطه حسابی بین 2° و 3° چه عددی است؟

ث) از دو قسمت اخیر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تمرین

۱-

الف) یک دنباله حسابی با قدرنسبت مثبت مثال بزنید که جمله چهارم آن 1° باشد.

ب) یک دنباله حسابی با قدرنسبت منفی مثال بزنید که جمله چهارم آن 1° باشد.

پ) دنباله‌ای حسابی مثال بزنید که تنها سه جمله مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند.

۲- در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب 2° و 56° می‌باشد. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به دست آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

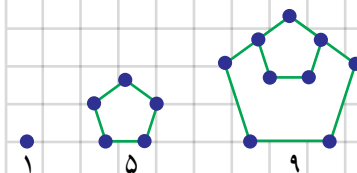
۳- در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن 39° می‌باشد. دنباله را مشخص کنید.

۴-

الف) دو جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید.

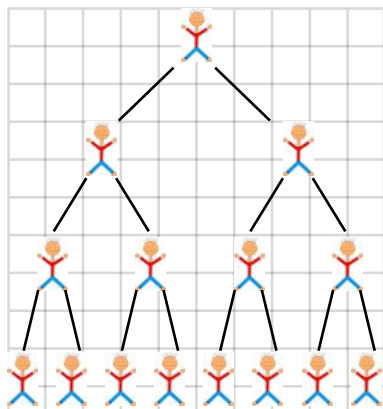
ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید.

پ) جمله چندم این دنباله 397° می‌باشد؟



دنباله هندسی

علی به بیماری آنفولانزا مبتلا شده است. روز شنبه چند تن از دوستانش بدون آنکه ماسک زده باشند به عیادت او آمدند. در این زمان ویروس آنفولانزا از راه تنفس وارد بدن امید و محسن می‌شود؛ چرا که آنها روز یکشنبه مبتلا به این بیماری شدند. اگر پیشگیری انجام نشود و موارد بهداشتی مراعات نگردد، پیش بینی می‌شود که انتشار ویروس تا مدتی با همین الگو ادامه یابد؛ یعنی امید و محسن در روز اول بیماری خود، هر کدام ویروس را به ۲ نفر دیگر منتقل کنند به طوری که روز دوشنبه ۴ نفر جدید از طریق آنها مبتلا شوند و این روند ادامه پیدا کند.



فعالیت

۱- جدول مقابل را کامل کنید و t_n را بیابید.

۲- در روز دهم چند فرد جدید مبتلا می‌شوند؟

۳- در روز یازدهم چند شخص جدید به این بیماری مبتلا می‌شوند.

۴- در روز چندم تعداد افراد جدیدی که به بیماری آنفولانزا مبتلا می‌شوند برابر ۱۶۳۸۴ نفر می‌شود.

در مثال بالا می‌توانیم تعداد مبتلایان جدید هر روز را به صورت دنباله زیر بنویسیم:

۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲,

این دنباله یک دنباله حسابی نیست؛ چرا که تفاضل جملات متوالی آن ثابت نیست، بلکه نسبت تقسیم هر دو جمله متوالی آن برابر عددی ثابت است.

$$\dots = \frac{32}{16} = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$$

اینگونه دنباله‌ها را دنباله‌های هندسی می‌نامیم. یعنی:

دنباله هندسی، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم.



فعالیت

در حالت کلی در یک دنباله هندسی، اگر جمله اول a و قدرنسبت r باشد، جملات آن به شکل زیر خواهند بود. جدول را تکمیل کنید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_n
a	ar	ar^2		

با دقت در الگوی به کار رفته در جملات بالا مشخص می شود که

جمله n ام دنباله هندسی به صورت $t_n = ar^{n-1}$ می باشد که در آن a جمله اول و r قدرنسبت می باشد.

کار در کلاس

۱- از بین موارد زیر، دنباله های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.

الف) $۷, ۲۸, ۱۱۲, ۴۴۸, \dots$

ب) $\sqrt{۳}, ۲\sqrt{۳}, ۳\sqrt{۳}, ۴\sqrt{۳}, \dots$

پ) $۱, \frac{-1}{۲}, \frac{1}{۴}, \frac{-1}{۸}, \dots$

ت) $۵, ۵, ۵, ۵, \dots$

۲- در دنباله های هندسی زیر، قدر نسبت را مشخص کرده و دو جمله بعدی را بنویسید. سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید.

الف) $۲, ۶, ۱۸, ۵۴, \boxed{162}, \boxed{486}, \dots, a_n = 2 \times 3^{n-1}$

ب) $۵, ۱۰, ۲۰, ۴۰, \square, \square, \dots, b_n =$

پ) $۶, -۶۰, ۶۰۰, -۶۰۰۰, \square, \square, \dots, c_n =$

ت) $۴, ۲, ۱, \frac{1}{۲}, \square, \square, \dots, d_n =$

۳-

الف) اگر بین ۳ و ۴۸ عدد ۱۲ را قرار دهیم، سه عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی می دهند. در این حالت می گوئیم ۱۲ واسطه هندسی بین ۳ و ۴۸ می باشد. برای این کار به جز ۱۲ چه عدد دیگری را می توان در نظر گرفت؟

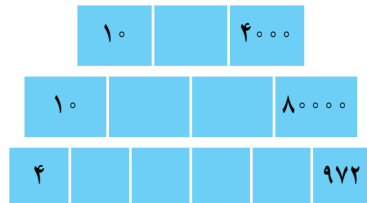
$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_3 = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ ar^2 = 48 \end{cases} \Rightarrow r^2 = \dots \Rightarrow r =$$

۳
۴۸

ب) بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟



ب) جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنباله هندسی حاصل شود.



۴- یک کوه یخی یکصد تنی، در هر روز یک پنجم وزن خود را از دست می‌دهد. پس از

گذشت ۵ روز کدام گزینه درست است؟

الف) چیزی از آن باقی نمی‌ماند.

ب) حدود $\frac{1}{3}$ آن باقی می‌ماند.

ج) تقریباً نصف آن آب می‌شود.

د) حدود $\frac{2}{3}$ آن باقی می‌ماند.

تمرین

۱- نرگس و نگار برای محاسبه هفتمین جمله دنباله هندسی ۱, ۳, ۹, ... روش‌های زیر را

به کار برده‌اند.

کدام یک از آنها این مثال را درست حل کرده‌اند؟ توضیح دهید.

۲- چند دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{4}{5}$ می‌توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

۳- درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و

در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.

الف) هر دنباله‌ای حسابی است یا هندسی

ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی

۴- علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه دست

دوم، در هر سال ۲۰٪ نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن

را بفروشد؟

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

۵- حاصل ضرب ۳۰ جمله اول دنباله هندسی زیر را محاسبه کنید؟ ۲, ۴, ۸, ...

نگار

$$r = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$t_v = 9 \left(\frac{1}{3}\right)^{v-1}$$

$$= \frac{1}{81}$$

نرگس

$$r = \frac{9}{3} = 3$$

$$t_v = 9(3)^{v-1}$$

$$= 6561$$