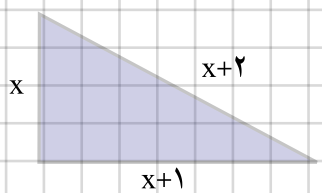
فصل سوم : معادلات و نامعادلات

درس اول : معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

صبا بعد از حل یک مسئله هندسه به نکته جالبی پی برد. او متوجه شد که اضلاع مثلث قائم‌الزاویه مسئله او، سه عدد متوالی ۳و۴و۵ هستند. از خواهر بزرگ‌تر خود، درسا، سؤال کرد که آیا می توان مثلث قائم الزاویه دیگری پیدا کرد که اضلاع آن سه عدد متوالی دیگر باشند؟ برای پاسخ به این سؤال، درسا، مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کرد و طول کوچک‌ترین ضلع آنرا x و طول اضلاع دیگر را اعداد متوالی بعد از x، یعنی x+۱ و x+۲ در نظر گرفت و به کمک رابطهٔ فیثاغورس، رابطهٔ زیر را بین سه ضلع مثلث به‌دست آورد :



$$x^۲+(x+۱)^۲=(x+۲)^۲$$

اکنون او می‌خواست معادلهٔ به‌دست آمده را حل کند، یعنی اعدادی که اگر به جای x قرارگیرند تساوی بالا را برقرار کنند. برای این‌کار معادلهٔ بالا را ساده کرد و آنرا به شکل $x^۲-۲x-۳=۰$ نوشت.

هر معادله که پس از ساده‌شدن، بزرگ‌ترین توان متغیر آن ۲ باشد، معادلهٔ درجهٔ دوم نامیده می‌شود.

هر معادلهٔ درجه دوم برحسب x در حالت کلی به شکل زیر است :

$$ax^۲+bx+c=۰ \quad ، \quad (a\neq ۰)$$

که در آن x متغیر و a و b و c اعداد حقیقی هستند.

در این بخش، تعدادی از روش‌های حل این معادله را ذکر می‌کنیم.

حل معادلهٔ درجه دوم به روش تجزیه

فعالیت

معادلهٔ درجه دوم $x^۲-۲x-۳=۰$ که درسا در بخش قبل به آن رسید را درنظر بگیرید.

۱) با تجزیهٔ سمت چپ معادلهٔ بالا، جای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

$$(x+۱)(x-\ ...)=۰$$

ویژگی حاصل ضرب صفر

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB=۰$، آنگاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است، یعنی :

$AB=۰ \Rightarrow A=۰$ یا $B=۰$

۲) از ویژگی بالا استفاده کنید و جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$(x+۱)(x-...)=۰ \Rightarrow x+۱=۰$ یا $x-...=۰ \Rightarrow x=-۱$ یا $x=...$

برای اطمینان از صحت جواب‌های حاصل شده، می‌توانیم هر دو جواب به‌دست آمده را در معادله قرار دهیم و آنها را آزمایش کنیم. یکی از جواب‌ها آزمایش شده است، جواب دیگر را آزمایش نمایید.

$x=...$	$x=-۱$
$x^۲-۲x-۳=۰$	$x^۲-۲x-۳=۰$
$...\overset{?}{=}۰$	$(-۱)^۲-۲(-۱)-۳\overset{?}{=}۰$
$...\overset{?}{=}۰$	$۱+۲-۳\overset{?}{=}۰$
$...=۰$ ☐	$۰=۰$ ☑

آیا هر دو جواب این معادله می‌توانند طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای باشند که در بالا بحث شده است؟ توضیح دهید.

کار در کلاس

معادلات درجه دوم زیر را به روش تجزیه حل کنید و جواب‌های خود را آزمایش کنید.

الف) $x^۲-۳x=۱۰$

....

....

....

ب) $۳t^۲-t=۰$

....

....

....

حل معادلهٔ درجه دوم به کمک ریشه‌گیری

فعالیت

معادلهٔ درجه دوم $x^2=25$ را درنظر بگیرید.

۱ـ جواب‌های این معادله را به روش تجزیه به‌دست آورید.

۲ـ از دو طرف معادلهٔ $x^2=25$، ریشه‌های دوم را محاسبه کرده و این معادله را به شکل $x=\pm 5$ می‌نویسیم. این جواب‌ها را با جواب‌هایی که از روش تجزیه به‌دست آورده‌اید، مقایسه کنید.

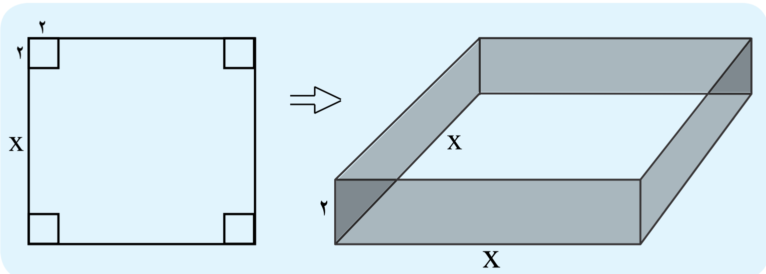
۳ـ اگر $x^2=a$ یک معادلهٔ درجه دوم باشد که در آن a یک عدد حقیقی است، آیا همیشه می‌توان جواب‌های آنرا به‌صورت $x=\pm\sqrt{a}$ نوشت؟ توضیح دهید.

اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2=a$ عبارتند از :

$x=-\sqrt{a}$ و $x=\sqrt{a}$

مثال :

یک دستگاه برش از صفحات مقوایی به شکل مربع، چهار مربع کوچک در گوشه‌های آن را برش زده و با تا زدن لبه‌ها، یک مکعب ایجاد می‌کند. اگر مربع‌های برش‌خورده در کنج‌ها به ضلع ۲ سانتی‌متر باشند و بخواهیم حجم مکعب ایجاد شده، ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب باشد، طول اضلاع کاغذهایی که باید برای اینکار انتخاب شوند را به دست آورید.



حل : از مقوایی که در شکل سمت چپ رسم شده، چهار مربع به ضلع ۲ سانتی‌متر جدا می‌کنیم تا مکعبی که سمت راست رسم شده، به‌دست آید. حجم این مکعب عبارتست از :

حجم مکعب = طول × عرض × ارتفاع = $x.x.2=2x^2$

از آنجا که حجم مکعب، ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب باید باشد، داریم $2x^2=200$. بنابراین

$x^2=....$ و با محاسبه ریشه های دوم این معادله، جواب های $x=....$ بدست می آید.

و چون طول نمی‌تواند منفی باشد، تنها ....=x مورد قبول است و طول ضلع مربع اولیه ... = ... + ... = ... + x سانتی‌متر می‌باشد.

کار در کلاس

جواب هر یک از معادلات زیر را در صورت وجود به روش ریشه‌گیری به‌دست آورید.

الف) $5x^2=20$ ب) $t^2+7=0$ ج) $(r-2)^2=16$

....

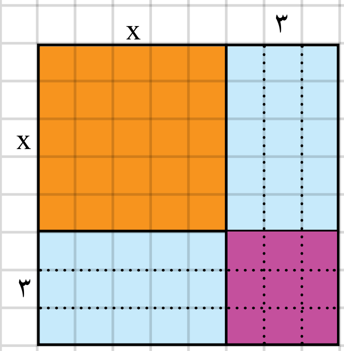
....

حل معادلهٔ درجه دوم به روش مربع کامل

فعالیت

۱ــ دو جمله‌ای x^2+6x را درنظر بگیرید. چه عددی باید به این دو جمله‌ای اضافه شود تا چند جمله‌ای حاصل به شکل مربع کامل نوشته شود؟ جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

$$x^2+6x+\ldots=(x+\ldots)^2$$



اعدادی که در جاهای خالی نوشته اید ، چه ارتباطی با شکل روبرو دارند؟

....

۲ــ اگر a یک عدد حقیقی باشد، به دو جمله‌ای x^2+ax چه جمله‌ای باید اضافه شود تا به شکل مربع کامل درآید؟ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$x^2+ax+\ldots=(x+\ldots)^2$$

مثال :

معادلهٔ $x^2-6x+4=0$ را به روش مربع کامل حل می کنیم.

$x^2-6x+4=0$	معادلهٔ درجه دوم
$x^2-6x=-4$	به دو طرف معادله، ۴− را اضافه کرده‌ایم
$x^2-6x+\ldots=-4+\ldots$	به دو طرف معادله ... را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود
$(x-3)^2=5$	سمت چپ را به شکل مربع کامل می نویسیم
$x-3=\pm\sqrt{5}$	از دوطرف معادله، ریشه دوم می گیریم
$x=3\pm\sqrt{5}$	به دو طرف معادله عدد ۳ را اضافه کرده‌ایم

بنابراین جواب‌ها یا ریشه‌های این معادله عبارتند از $3+\sqrt{5}$ و $3-\sqrt{5}$.

کار در کلاس

معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $x^{2}+2x=24$ ب) $t^{2}+3t=3$ ج) $n^{2}-4n+5=0$ د) $2r^{2}+r-2=0$

....

....

....

....

حل معادلهٔ درجهٔ دوم به روش فرمول کلی

فعالیت :

در بخش‌های قبل، روش‌هایی برای حل معادلات درجه دوم فرا گرفته‌اید. اکنون می‌خواهیم یک فرمول کلی برای حل معادلهٔ درجه دوم $ax^{2}+bx+c=0$ که در آن $a\neq 0$ است، پیدا کنیم.

دانش‌آموز : مگر روش مربع کامل این قابلیت را ندارد که بتواند هر معادلهٔ درجه دوم را حل کند؟

معلم : بله، همین‌طور است. برای یافتن این فرمول کلی نیز از روش مربع کامل استفاده می‌کنیم.

دانش‌آموز : پس باید همان کارها را دقیقاً روی معادله $ax^{2}+bx+c=0$ انجام دهیم.

معلم : آفرین. برای رسیدن به این فرمول، مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

معادلهٔ درجه دوم	$ax^{2}+bx+c=0$
دو طرف معادله را بر a تقسیم می‌کنیم	$x^{2}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$
به دو طرف معادله، $-\frac{c}{a}$ را اضافه کرده‌ایم	$x^{2}+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$
به دو طرف معادله، .... را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود	$x^{2}+\frac{b}{a}x+\ldots=-\frac{c}{a}+\ldots$
دو طرف را ساده کرده‌ایم	$(x+\frac{b}{2a})^{2}=\frac{b^{2}-4ac}{4a^{2}}$

اکنون قرار می‌دهیم $\Delta=b^{2}-4ac$، پس : $(x+\frac{b}{2a})^{2}=\frac{\Delta}{4a^{2}}$

آیا می‌توانید با ریشهٔ دوم گرفتن از دو طرف این معادله، جواب‌های آنرا به‌دست آورید؟

دانش‌آموز : اگر $\Delta<0$ باشد، از سمت راست نمی‌توان ریشهٔ دوم گرفت.

معلم : آفرین. پس اگر Δ یک عدد منفی باشد، معادله درجه دوم ریشه‌ای ندارد. اگر $\Delta>0$ باشد، آیا می‌توانید ریشه‌های این معادله را به‌دست آورید؟

دانش‌آموز : بله. کافیست از دو طرف معادلهٔ $\frac{\Delta}{4a^2} = (x+\frac{b}{2a})^2$ ریشهٔ دوم بگیریم :

دانش‌آموز : اگر $\Delta=0$ باشد، آیا این معادله ریشه‌ای دارد؟

معلم : بله و این ریشه از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

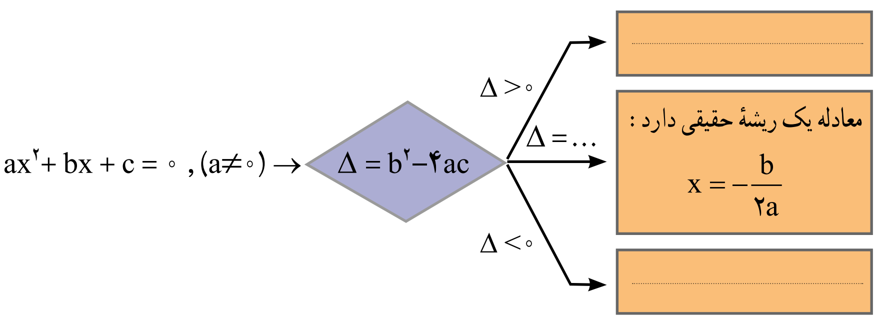
$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{\Delta}{4a^2} \quad (-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}) \quad (x+\frac{b}{2a})^2=0 \Rightarrow x+\frac{b}{2a}=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{2a}$$

دانش‌آموز : پس در حالت $\Delta=0$ معادله تنها یک ریشه به‌صورت $x=-\frac{b}{2a}$ دارد.

معلم : این ریشه از معادلهٔ $(x+\frac{b}{2a})^2=(x+\frac{b}{2a})(x+\frac{b}{2a})=0$ به‌دست آمده است و چون هر دو معادلهٔ $x+\frac{b}{2a}=0$ و $x+\frac{b}{2a}=0$ جواب یکسان دارند، به جواب مشترک آنها، ریشهٔ مضاعف یا ریشه مکرر مرتبه دوم می‌گوییم.

فعالیت

با توجّه به مثال بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.



کار در کلاس

معادلات زیر را با فرمول کلی حل می کنیم.

الف) $x^2-x+1=0$

ب) $-2x^2+x+3=0$

حل : الف) در این معادله، $a=1 \, , b=-1 \, , c=1$، پس : $\Delta=b^2-4ac=1-4=-3$ و چون $\Delta<0$ است، این معادله ریشه حقیقی ندارد.

ب) در این معادله، $a=-2 \, , b=1 \, , c=3$، پس $\Delta=b^2-4ac=1-4(-6)=1+24=25$،

پس $\Delta>0$ و این معادله دو ریشه دارد که از روابط زیر به‌دست می‌آیند :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۱ \pm ۵}{-۴} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-۱+۵}{-۴} = \frac{۴}{-۴} = -۱ \\ x = \frac{-۱-۵}{-۴} = \frac{-۶}{-۴} = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

مثال :

معادلهٔ $h=-۱۴t^۲+۱۲t+۲$ ارتفاع یک توپ تنیس را برحسب متر از سطح زمین که یک تنیس باز پرتاب می‌کند، در ثانیهٔ t نشان می‌دهد. چقدر طول می‌کشد تا پس از پرتاب، توپ به سطح زمین برخورد کند؟

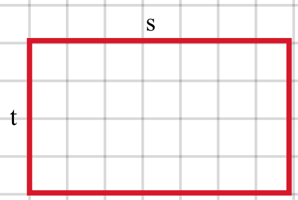
حل : در لحظهٔ برخورد به زمین، فاصلهٔ توپ با زمین صفر است، بنابراین در معادلهٔ پرتاب قرار می‌دهیم $h=۰$، پس $۱۴t^۲+۱۲t+۲=۰$. اگر دو طرف این معادله را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کنیم، به معادله ی $۷t^۲+۶t+۱=۰$ می رسیم. در این معادله، $a=-۷\ , b=۶\ , c=۱$ پس $\Delta=b^۲-۴ac=۳۶+۲۸=۶۴$، بنابراین $\Delta>۰$ و معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد که به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند :

$$\begin{cases} t = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۶+۸}{-۱۴} = \frac{۲}{-۱۴} = \frac{-۱}{۷} \\ t = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۶-۸}{-۱۴} = \frac{-۱۴}{-۱۴} = ۱ \end{cases}$$

اکنون چون زمان منفی نیست، فقط جواب $t=۱$ قابل قبول است. بنابراین یک ثانیه پس از پرتاب، توپ با سطح زمین برخورد می کند.

مثال :

از یک رشته سیم به طول ۵۰ سانتی‌متر، می‌خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ سانتی‌متر مربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را مشخص می کنیم.



حل : اگر طول و عرض این مستطیل، برابر با s و t باشند، با توجه به اینکه محیط آن ۵۰ سانتی‌متر است، پس $۲(s+t)=۵۰$. از ساده کردن این معادله به معادله $s+t=۵۰$ می رسیم، بنابراین $t=۲۵-s$.

از سوی دیگر $st=۱۴۴$. با جایگذاری tبرحسب s در این معادله به شکل $(۲۵-s)=۱۴۴$ s می رسیم که بعد از ساده شدن، معادله ی درجه دوم $s^۲-۲۵s+۱۴۴=۰$حاصل می شود.

در این معادله $a=۱\ , b=-۲۵\ , c=۱۴۴$. بنابراین

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۲۵)^۲-۴(۱)(۱۴۴)=۶۲۵-۵۷۶=۴۹$$

پس $\Delta>۰$ و معادله دو ریشه حقیقی دارد که به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند :

$$\begin{cases} s_۱ = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} = \dfrac{۲۵+۷}{۲} = \dfrac{۳۲}{۲} = ۱۶ \\ s_۲ = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} = \dfrac{۲۵-۷}{۲} = \dfrac{۱۸}{۲} = ۹ \end{cases}$$

و چون $t = ۲۵ - s$، پس برای t نیز دو جواب به‌دست می‌ایند :

$$\begin{cases} s_۱ = ۱۶ \Rightarrow t_۱ = ۲۵ - ۱۶ = ۹ \\ s_۲ = ۹ \Rightarrow t_۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \end{cases}$$

بنابراین در هر حالت یک مستطیل با اضلاع ۹ و ۶ سانتی‌متر به‌دست می‌آید.

تمرین

۱ــ معادلات زیر را به کمک تجزیه حل کنید.

۱) $x^۲ - ۱۱x = -۱۰$ ۲) $۵t^۲ = ۲۰$

۳) $۵a^۲ - ۷a = ۲a(a-۳)$ ۴) $۴k^۲ - ۱۳k + ۳ = ۰$

۲ــ هر یک از معادلات زیر را با ریشهٔ دوم گرفتن حل کنید.

۱) $n^۲ - ۲ = ۲۶$ ۲) $x^۲ + ۱۲ = ۳$

۳) $(۳t-۲)^۲ = ۴$ ۴) $۳ - ۳k = ۳k(۲k-۱)$

۳ــ معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

۱) $x^۲ - ۶x = ۷$ ۲) $s^۲ - ۳s + ۳ = ۰$

۳) $r^۲ + ۴r + ۴ = ۰$ ۴) $۲a^۲ + ۵a - ۳ = ۰$

۴ــ هر یک از معادلات زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

۱) $۴x^۲ - ۱۳x + ۳ = ۰$ ۲) $r - r^۲ = ۳$

۳) $a^۲ + ۲\sqrt{۳}a = ۹$ ۴) $\dfrac{t^۲}{۳} - \dfrac{t}{۲} - \dfrac{۳}{۲} = ۰$

۵ــ هر یک از معادلات زیر را به روش دلخواه حل کنید.

۱) $۲x^۲ = ۲۵۰$ ۲) $۹ - ۶z + z^۲ = ۰$

۳) $۴a^۲ + ۳a = ۱$ ۴) $b^۲ + \sqrt{۲}b - ۴ = ۰$

۶ــ مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ می‌باشد. این دو عدد را پیدا کنید.

۷ــ طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی‌متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

۸ــ سن دو برادر ۴ سال با یکدیگر اختلاف دارد. اگر چهار سال دیگر حاصل‌ضرب سن آنها ۶۰ شود، سن هر کدام را به‌دست آورید.

۹ــ یک عکس با سایز ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع، که شامل عکس نیز هست، قرار دارد. اگر فاصلهٔ همهٔ لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.

۱۰ــ در یک لیگ والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم‌های لیگ، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم‌های این لیگ را به‌دست آورید. اگر تعداد بازی‌های لیگ N و تعداد تیم‌ها n باشد، مدلی برای تعداد بازی‌ها به‌دست آورید.

۱۱ــ فشار خون نرمال یک شخص مذکر[1]، که بر حسب میلی‌متر جیوه (mmHg) اندازه‌گیری می‌شود، توسط رابطهٔ $P=0/006s^2-0/02s+120$ بیان می‌شود که در آن، P فشار خون نرمال یک فرد با سن s می‌باشد. سن شخصی را، به نزدیک‌ترین سال، پیدا کنید که فشار خون آن ۱۲۵ میلی‌متر جیوه باشد. (از ماشین حساب استفاده کنید.)

۱ــ منظور از این نوع فشار خون، فشار خون سیستولیک است.

درس دوم : سهمی

آیا تاکنون به مسیری که یک اسکی باز در یک مسابقهٔ پرش ارتفاع و یا یک توپ بسکتبال در پرتاب به سمت حلقه طی می‌کند، دقت کرده‌اید؟ هیچ کدام از این مسیرها، یک خط راست نیستند.

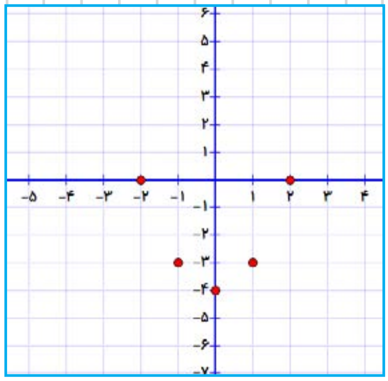
مسیر طی شده توسط اسکی باز و یا توپ بسکتبال می‌تواند توسط معادلهٔ درجهٔ دوم $y=ax^{۲}+bx+c$ بیان شود که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند و البته $a\neq ۰$ است.

فعالیت

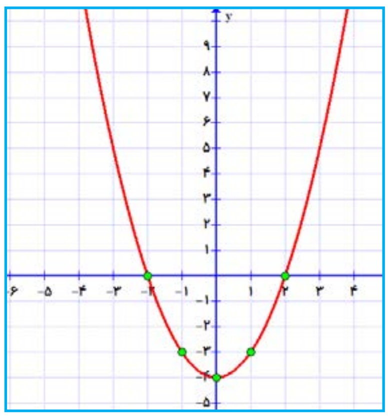
معادلهٔ $y=x^{۲}-۴$ را درنظر بگیرید.

الف) جدول زیر، چند نقطه را که در این معادله صدق می‌کنند، به‌دست می‌آورد. این جدول را کامل کنید.

x	$y=x^{۲}-۴$	(x,y)
۲−	$y=(-۲)^{۲}-۴=۴-۴=۰$	(۰,۲−)
۱−	....	....
۰	$y=(۰)^{۲}-۴=۰-۴=-۴$	(۴−,۰)
۱	....	....
۲	....	....



ب) نقاط به‌دست آمده در جدول بالا را در یک دستگاه مختصات مشخص کرده (شکل الف) و آنها را به یکدیگر وصل می‌کنیم (شکل ب).



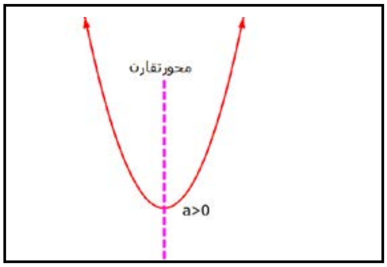
ج) پایین‌ترین نقطهٔ این نمودار چه نقطه ای است؟ آیا می‌توانید محور تقارن این نمودار را مشخص کنید.

....

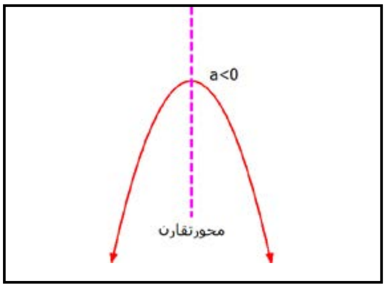
د) برای رسم این نمودار، از چند نقطه استفاده کرده‌ایم؟ آیا با نقاط کمتر نیز می‌توانیم این نمودار را رسم کنیم؟

....

نمودار هر معادله به شکل $y=ax^2+bx+c$ که در آن a و b و c اعداد حقیقی هستند و $a\neq 0$ را یک سهمی می‌گوییم که به یکی از دو صورت مقابل است :



نقطهٔ A که جهت پیچش سهمی را عوض می‌کند، رأس سهمی نامیده می‌شود.
اگر $a>0$ باشد، A پایین‌ترین نقطهٔ سهمی است و جهت پیچش به سمت بالاست و اگر $a>0$ باشد، A بالاترین نقطهٔ سهمی است و جهت پیچش به سمت پایین است.
همچنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، محور تقارن سهمی نامیده می‌شود.



فعالیت

معادلهٔ یک سهمی به‌صورت $y=x^2-4x+5$ است.

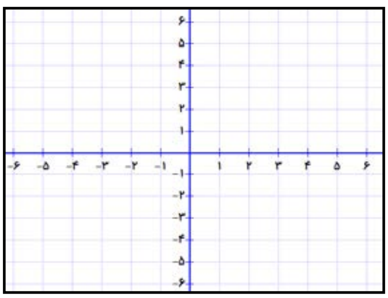
الف) سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل نوشته و نشان دهید که به‌صورت $y=(x-2)^2+1$ در می‌آید.

ب) ریشهٔ عبارت داخل پرانتز را به‌دست آورده و آن را در ردیف وسط جدول زیر قرار دهید.
جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$x-2=0 \Rightarrow$ ....

x	$y=x^2-4x+5$	(x,y)
۰	....	....
۱	....	....
۲	....	....
۳	....	....
۴	....	....

ج) پنج نقطهٔ حاصل شده در جدول بالا را به یکدیگر وصل کنید تا این سهمی رسم شود.



د) آیا می‌توانید پایین ترین نقطهٔ این سهمی را از معادلهٔ آن به شکل $y=(x-2)^2+1$ به‌دست آورید.

....

هر سهمی به‌صورت $y = a(x-h)^۲+ k$ که $a\neq ۰$ ، رأسی به مختصات (h , k) و محور تقارنی با معادلهٔ $x = h$ دارد.

کار در کلاس

۱ــ در هر یک از سهمی‌های زیر، رأس را مشخص کرده و سپس آن را رسم کنید.

الف) $y=(x-۲)^۲+۳$

ب) $y=x^۲+۲x+۳$

ج) $y=x^۲$

فعالیت

معادلهٔ سهمی به‌صورت $y =ax^۲ +bx+c$ را در نظر بگیرید.

الف) سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید و نشان دهید که

$$y = a(x+\frac{b}{۲a})^۲+\frac{۴ac-b^۲}{۴a}$$

ب) با استفاده از قسمت قبل، نشان دهید که رأس این سهمی، نقطهٔ $(-\frac{b}{۲a},\frac{۴ac-b^۲}{۴a})$ و محور تقارن آن نیز $x=-\frac{b}{۲a}$ می‌باشد.[۲]

مثال :

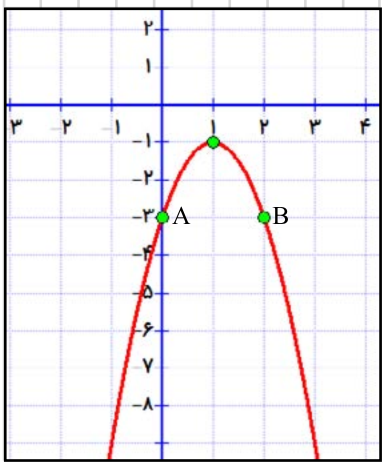
سهمی $y = -۲x^۲+۴x-۳$ را رسم می‌کنیم.

در این سهمی $a = -۲$، $b =۴$ و $c = -۳$ است. مختصات رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم.

$$x=-\frac{b}{۲a}=\frac{-۴}{-۴}=۱$$

اکنون در جدول زیر، سه نقطه از آن را پیدا می‌کنیم.

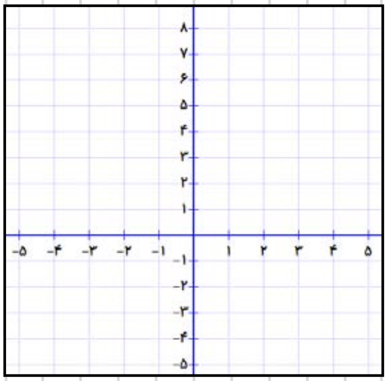
x	$y=-۲x^۲+۴x-۳$	(x,y)
۰	$-۲(۰)^۲+۴(۰)-۳=-۳$	$(۰,-۳)$
۱	$-۲(۱)^۲+۴(۱)-۳=-۱$	$(۱,-۱)$
۲	$-۲(۲)^۲+۴(۲)-۳=-۳$	$(۲,-۳)$



بنابراین نمودار این سهمی به‌صورت مقابل خواهد بود.

دقت کنید که نقاط A و B از این سهمی که عرض یکسان دارند، نسبت به محور تقارن یعنی خط $x=۱$ قرینه‌اند.

۲ــ عرض رأس سهمی یعنی $\frac{۴ac-b^۲}{۴a}$ را می‌توانید از قرار دادن $x=-\frac{b}{۲a}$ در معادلهٔ سهمی به‌دست آورید.



فعالیت

معادلهٔ دو سهمی به‌صورت $y=\frac{x^{۲}}{۲}+۱$ و $y=۲x^{۲}+۱$ داده شده است.

الف) مختصات راس و دو نقطه دیگر از این دو سهمی را در جدول زیر مشخص کرده و سپس نمودار هر دو سهمی را در شکل مقابل رسم کنید و نشان دهید که مختصات رأس هر دو سهمی نقطهٔ $A(۰,۱)$ است.

x	$y=\frac{x^{۲}}{۲}+۱$	(x,y)

x	$y=۲x^{۲}+۱$	(x,y)

ب) معادلهٔ سهمی دیگری که نقطهٔ A رأس آن است، را بنویسید و آن را در دستگاه بالا رسم کنید.

ج) ضرایب $x^{۲}$ در معادلات سهمی‌هایی که رسم شده‌اند، چه نقشی در نمودار آنها داشته است؟

....

تمرین

۱ــ نمودار هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y=(x-۲)^{۲}-۳$

ب) $y=۲x^{۲}+۱$

ج) $y=x-x^{۲}$

د) $y=\frac{x^{۲}}{۲}+x-۴$

۲ــ اگر $(-۲,۵)$ و $(۰,۵)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، محور تقارن این سهمی را به‌دست آورید.

۳ــ سهمی $y=ax^{۲}+bx+c$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور xها را در نقاط ۱− و ۲ قطع کرده است. معادلهٔ این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.

۴ــ دو پرتاب‌گر وزنه در یک مسابقهٔ ورزشی، وزنه های خود را با زاویه‌های متفاوت α و β که $\alpha<\beta$ ، پرتاب کرده‌اند. پرتاب‌گر A، زاویهٔ α را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطهٔ $y=-\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{۳}{۲}x+۲$ به‌دست می‌آید. پرتاب‌گر B نیز زاویهٔ β را انتخاب می‌کند و

مسیر طی شده از رابطهٔ $y = -2x^2+3x+2$ به‌دست می‌آید که در هر دو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح زمین و x مسافت افقی طی شده، بر حسب متر است.

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه‌ها را رسم کنید.

ب) محل برخورد وزنه‌ها با زمین یا محور xها درچه نقاطی است؟ کدام یک از وزنه‌ها مسافت افقی بیشتری طی کرده است؟

ج) کدام یک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازه آنها را مشخص کنید.

درس سوم :تعیین علامت

در یک شرکت تولیدی، سود حاصل از رابطهٔ $P(x) = 5x - 200$ به‌دست می‌آید که در آن x تعداد کالای تولید شده است. جدول زیر، سود این شرکت را به ازای چند مقدار x نشان می‌دهد.

تعداد کالای تولید شده (x)	۱۰	۲۰	۴۰	۵۰	۱۰۰
سود حاصله $P(x) = 5x - 200$	-150	-100	۰	۵۰	۳۰۰

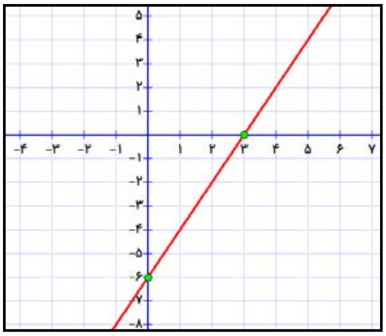
همان‌طور که از این جدول استنباط می‌شود، با تولید ۴۰ کالا، این شرکت هیچ سودی نخواهد داشت. همچنین اگر بیشتر از ۴۰ کالا تولید شود، شرکت به سوددهی می‌رسد در حالی که با تولید کمتر از این تعدادکالا، این شرکت، سود منفی (زیان) خواهد داشت. علامت P(x) برای xهای مختلف از جدول زیر به‌دست می‌آید.

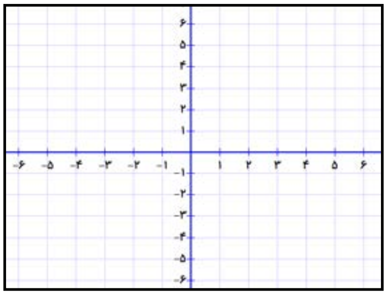
x	$x < 40$	۴۰	$x > 40$
P(x)	$-$	۰	$+$

حل بسیاری از مسائل، نیازمند یافتن علامت یک عبارت خاص است که باید آن را تعیین علامت کرد.

تعیین علامت چندجمله‌ای درجهٔ اول

فعالیت





۱ـ نمودار خط $y = ۲x - ۶$ در شکل مقابل رسم شده است. با استفاده از آن، علامت y را در جدول زیر بنویسید.

x	$x < ۳$	۳	$x > ۳$
$y=۲x-۶$	.....	۰	.....

۲ـ نمودار خط $y = -۲x + ۶$ را نیز در شکل مقابل رسم کرده و جدول زیر که علامت y را برای xهای مختلف تعیین می‌کند، کامل کنید.

x	$x<...$	...	$x>...$
$y=-۲x+۶$	....	۰	....

۳ـ علامت عددی که ضریب x است چه تفاوتی در جدول تعیین علامت این خطوط ایجاد کرده است؟

۴ـ نشان دهید که علامت عبارت $y = ax + b$، برای xهای مختلف از جدول زیر تعیین می‌شود.

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
$y = ax+b$	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

مثال

عبارت $y = ۵x - ۲$ را تعیین علامت می‌کنیم.

ریشه عبارت $۵x-۲$ از معادله $۵x-۲=۰$ به دست می‌آید که برابر $x = \frac{۲}{۵}$ است.

با توجه به این که علامت ضریب x ، یعنی $a = ۵$ ، مثبت است، طبق جدول بالا، جدول تعیین علامت به‌صورت زیر است.

x	$x < \frac{۲}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	$x > \frac{۲}{۵}$
$y = ۵x - ۲$	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

مقدار y را برای $x = ۳$ و $x = -۱$ به‌دست آورید و صحت علامت اعداد به‌دست آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

....

مثال

علامت عبارت $A = (۲x-۱)(۳-x)$ را برای xهای مختلف تعیین می‌کنیم.

جدول تعیین علامت برای هرکدام از عبارت‌های $۳-x$ و $۲x-۱$ به‌صورت زیراست :

x	$x < \frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$x > \frac{۱}{۲}$
$۲x-۱$	−	۰	+

x	$x < ۳$	۳	$x > ۳$
$۳-x$	+	۰	−

اطلاعات این دو جدول را در یک جدول به‌صورت زیر می‌نویسیم :

x	$x < \frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲} < x < ۳$	۳	$x > ۳$
$۲x-۱$	−	۰	+		+
$۳-x$	+		+	۰	−

بنابراین در سه ناحیهٔ بالا که با رنگ‌های مختلف نشان داده شده است، علامت هرکدام از این دو عبارت مشخص شده است. مثلاً برای $x > ۳$، عبارت $۲x-۱$، مثبت است ولی $۳-x$ منفی می‌باشد، پس علامت عبارت حاصلضرب آنها، منفی خواهد بود. با بحث مشابه، برای دو ناحیهٔ دیگر، جدول تعیین علامت $A = (۲x-۱)(۳-x)$ به‌صورت زیر می‌باشد.[۳]

x		$\frac{۱}{۲}$		۳	
$۲x-۱$	−	۰	+		+
$۳-x$	+		+	۰	−
A	−		+		−

دقت کنید که روی ستون‌ها نیزقاعدهٔ ضرب انجام شده است.

مقدار A را برای $x = ۴$ و $x = ۰$ به‌دست آورید و صحت علامت مقادیر به‌دست آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

۳ــ از نوشتن حدود x در جدول تعیین علامت، صرف‌نظر می‌کنیم.

کار در کلاس

هریک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $A=(3x+1)(x-2)$

ب) $B=(2x-3)^2$

ج) $C=x^3(7-x)$

د) $D=\frac{x-1}{5-2x}$ [۴]

تعیین علامت چندجمله‌ای درجهٔ دوم

فرض کنیم $P(x)=ax^2+bx+c$ یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم باشد که در آن a,b,c اعداد حقیقی هستند و $a\neq 0$. برای حل معادلهٔ $P(x)=0$ به شیوهٔ مربع کامل، $P(x)$ را به شکل زیر می نویسیم.

$$P(x)=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right],$$

که در آن، $\Delta=b^2-4ac$ و می‌دانیم که تعداد ریشه‌های معادلهٔ $P(x)=0$ به علامت Δ بستگی دارد. با انجام فعالیت زیر علامت $P(x)$ را در حالت‌های مختلف به‌دست می‌آوریم.

فعالیت

۱ــ فرض کنیم که در معادلهٔ $P(x)=0$، $\Delta>0$ باشد، در این‌صورت جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پرکنید.

$$P(x)=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=a\left[(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x+...-...)\right]=a\left[(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})(x-......)\right]$$

اگر $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ دو ریشهٔ معادلهٔ $P(x)=0$ باشند، نشان دهید که $P(x)$ به شکل زیر نوشته می‌شود :

$$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$$

اکنون با فرض اینکه $x_1<x_2$، نشان دهید که علامت $P(x)$، برای مقادیر مختلف x، به‌صورت زیر تعیین می‌شود.

x		x_1		x_2	
$P(x)$	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

۴ــ تقسیم دو علامت با ضرب آنها نتیجهٔ یکسانی دارد. همچنین حاصل $\frac{a}{0}$ که $a\in R$ است، قابل محاسبه نیست و به آن تعریف نشده می‌گوییم.

۲ـ اگر $\Delta = ۰$ باشد، نشان دهید که $x_۱ = x_۲ = -\frac{b}{۲a}$ و $P(x)$ به شکل $P(x) = a(x - x_۱)^۲$ نوشته می‌شود. اکنون با بررسی مقادیر مختلف x، نشان دهید که علامت P(x) از جدول زیر به‌دست می‌آید.

x		$x_۱$	
P(x)	موافق علامت a	۰	موافق علامت a

۳ـ اکنون فرض کنید $\Delta < ۰$ باشد، در این صورت معادلهٔ $P(x) = ۰$ ریشهٔ حقیقی ندارد. با توجه به اینکه $P(x) = a\left[(x + \frac{b}{۲a})^۲ - \frac{\Delta}{۴a^۲}\right]$، نشان دهید که عبارت داخل کروشه همیشه مثبت است و علامت P(x) از جدول زیر تعیین می‌شود.

x	برای هر $x \in R$
P(x)	موافق علامت a

۴ـ با توجه به قسمت بالا، مشخص کنید که اگر P(x) برای هر $a \in R$، مثبت باشد، a و Δ چه علامتی دارند؟ برای وقتی که P(x) منفی است نیز علامت a و Δ را تعیین کنید.

....

مثال :

عبارت $A = ۲x^۲ - x - ۳$ را تعیین علامت می‌کنیم. ابتدا ریشه‌های معادلهٔ $A = ۰$ را در صورت وجود به‌دست می‌آوریم.

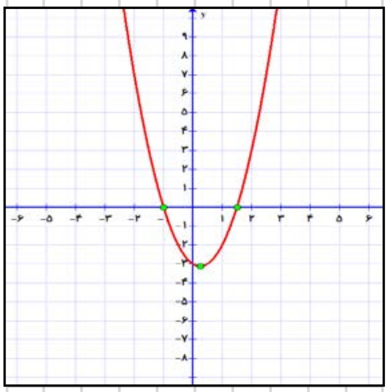
$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۱)^۲ - ۴(۲)(-۳) = ۱ + ۲۴ = ۲۵$$

پس معادلهٔ $A = ۰$ دو ریشهٔ متمایز به‌صورت زیر دارد :

$$x_۱ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۱ + ۵}{۴} = \frac{۳}{۲} \quad , \quad x_۲ = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۱ - ۵}{۴} = -۱$$

با توجه به اینکه $a = ۲$، بنابراین علامت P(x) طبق فعالیت بالا به‌صورت زیر مشخص می‌شود :

x		-۱		$\frac{۳}{۲}$	
P(x)	+	۰	−	۰	+



نمودار سهمی $y = ۲x^۲ - x + ۳$ در شکل مقابل رسم شده است. به کمک نمودار نیز به راحتی می‌توان علامت y را برای xهای مختلف تعیین نمود. برای $x > \frac{۳}{۲}$ و یا $x < -۱$، نمودار بالای محور xهاست، پس y علامت مثبت دارد و برای $-۱ < x < \frac{۳}{۲}$، نمودار پایین محور xهاست، پس علامت y منفی است.

مثال :

عبارت $P(x)=\dfrac{x(x-۳)^۲}{x^۲+x-۲}$ را تعیین علامت می‌کنیم.

هریک از عبارت‌های موجود در صورت و مخرج را تعیین علامت می‌کنیم و نتایج را در یک جدول می‌نویسیم.

$$\begin{cases} x=۰ \\ (x-۳)^۲=۰ \Rightarrow x-۳=۰ \Rightarrow x=۳ \\ x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۱)=۰ \Rightarrow x=-۲ \text{ یا } x=۱ \end{cases}$$

x		-۲		۰		۱		۳	
x	−		−	۰	+		+		+
$(x-۳)^۲$	−		+		+		+	۰	+
$x^۲+x-۲$	+	۰	−		−	۰	+		+
P(x)	−		+	۰	−		+	۰	+
		تعریف نشده				تعریف نشده			

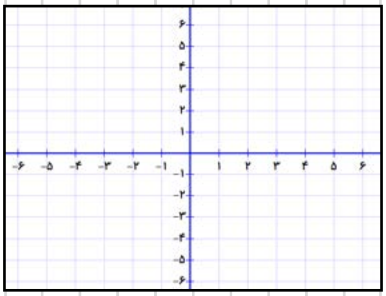
کار در کلاس

۱ــ چندجمله‌ای $y=-x^۲+x+۲$ را با محاسبه ریشه‌ها، در یک جدول تعیین علامت کنید و سپس با رسم آن، صحت علامت‌های به‌دست آمده در جدول را با نمودار، بررسی کنید.

....

....

....



۲ــ عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $A=(x^۲-۹)(۳x-۱)$

ب) $B=\dfrac{-x^۲+۶x-۹}{x^۲+x+۳}$

....	....

....	....

....	....

....	....

حل نامعادله

سال گذشته با مفهوم نامعادله آشنا شده‌اید. اگر A و B دو عبارت جبری باشند، نامعادلاتی که با این دو عبارت ساخته می‌شوند، به‌صورت زیر هستند :

نامعادله	می‌خوانیم
$A < B$	A کوچک‌تر از B است.
$A \leq B$	A کوچک‌تر یا مساوی B است.
$A > B$	A بزرگ‌تر از B است.
$A \geq B$	A بزرگ‌تر یا مساوی B است.

برای حل یک نامعادله می‌توانیم از خواص زیر استفاده کنیم.

۱ـ خاصیت جمع :

برای عبارت‌های جبری A، B و C ، اگر $A < B$ سپس $A + C < B + C$.

۲ـ خاصیت ضرب

الف) اگر $C > 0$ و $A > B$ سپس $AC > BC$.

ب) اگر $C < 0$ و $A > B$ سپس $AC < BC$.

مثال :

نامعادلهٔ $5x - 1 \geq 3x - 7$ را حل می‌کنیم.

$$5x - 1 \geq 3x - 7$$

به دو طرف نا معادله، $-3x$ را اضافه می‌کنیم.

$$5x - 1 - 3x \geq 3x - 7 - 3x$$

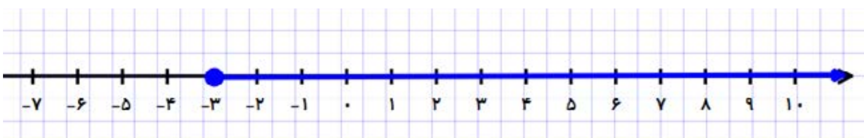
$$2x - 1 \geq -7$$

دو طرف نامعادله را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم.

$$2x \geq -6$$

$$x \geq -3$$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله عبارتست از $\{x \in R \mid x \geq -3\}$ که با نماد بازه به شکل $[-3, +\infty)$ نوشته می‌شود. نمایش هندسی این مجموعه به صورت زیر است.



نامعادلهٔ دوگانه

فرض کنید x متغیری باشد که همزمان در دو نامعادله‌ی زیر صدق می‌کند :

$$۳x - ۱ \le ۸ \qquad , \qquad -۲ < ۳x - ۱$$

برای تعیین حدود متغیر x، باید هردو نامعادله را حل کنیم و به خاطر وجود «و» بین این دو نامعادله، باید x هایی را بیابیم که در هر دو نامعادله صدق کند، بنابراین بین جواب‌های آنها اشتراک می‌گیریم. یک راه کوتاه‌تر برای رسیدن به جواب، ترکیب این دو نامعادله با یکدیگر است که به صورت یک نامساوی دوگانه نوشته می‌شود :

$$-۲ < ۳x - ۱ \le ۸$$

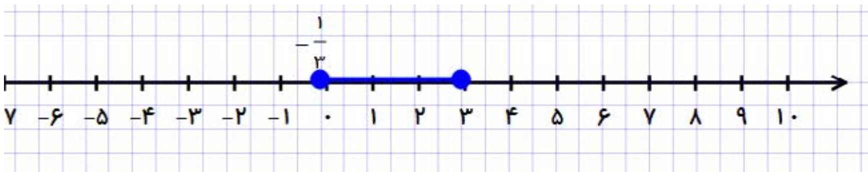
اکنون می‌توانیم با خواص جمع و ضرب، حدود x را تعیین کنیم :

$$-۲ < ۳x - ۱ \le ۸$$

به دو نا معادله ۱+ را اضافه می کنیم. $\qquad -۱ < ۳x \le ۹$

دو نا معادله را در $\frac{۱}{۳}$ ضرب می کنیم. $\qquad -\frac{۱}{۳} < x \le ۳$

بنابراین مجموعه جواب عبارتست از $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{۱}{۳} < x \le ۳\right\}$. با استفاده از نماد بازه‌ها، مجموعه جواب این نامعادله، بازهٔ $(-\frac{۱}{۳}, ۳]$ است و نمایش هندسی آن به‌صورت زیر است :



نامعادلهٔ دوگانهٔ فوق را به‌صورت دستگاه نامعادلات زیر نیز نشان می‌دهیم :

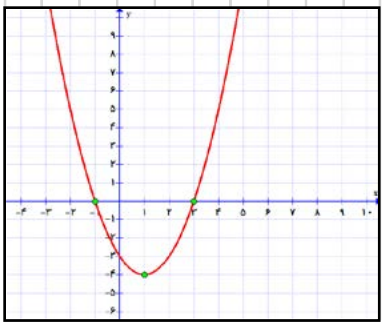
$$\begin{cases} ۳x - ۱ > -۲ \\ ۳x - ۱ \le ۸ \end{cases}$$

کار در کلاس

حداقل و حداکثر دمای یک شهر در یک روز، ۱۵ و ۲۵ درجهٔ سانتی‌گراد و رابطه‌ای که درجهٔ فارنهایت (F) را به سانتی‌گراد (C) تبدیل می‌کند، به‌صورت $C = \frac{۵}{۹}(F - ۳۲)$ است. حداقل و حداکثر دمای این شهر را برحسب فارنهایت تعیین کنید. (قرار دهید $۱۵ \le C \le ۲۵$ و سپس از رابطهٔ داده شده، C را برحسب F بنویسید و نامعادلهٔ دوگانهٔ به‌دست آمده را حل کنید.)

فعالیت

چندجمله‌ای $y = x^۲ - ۲x - ۳$ را درنظر بگیرید. نمودار این معادله به عنوان یک سهمی در شکل مقابل رسم شده است.



الف) به کمک نمودار رسم شده، برای چه مقادیری از x، نمودار سهمی، پایین محور xهاست؟

ب) چندجمله‌ای $y = x^{۲} - ۲x - ۳$ را در یک جدول تعیین علامت کنید و مشخص کنید که برای چه مقادیری از x، علامت y منفی می‌باشد؟

....

....

ج) نشان دهید که از مجموعه جواب‌های به‌دست آمده در قسمت الف و ب می‌توان برای حل نامعادلهٔ $x^{۲} - ۲x - ۳ < ۰$ استفاده کرد.

....

کار در کلاس

هریک از نامعادلات زیر را به دو روش هندسی و جدول تعیین علامت، حل کنید.

الف) $۳x^{۲} - x - ۲ \geq ۰$

ب) $x^{۲} \leq ۴$

ج) $-x^{۲} + ۲x - ۳ < ۰$

مثال :

برای چه مقادیری از m، عبارت $y = x^{۲} + mx + ۱$ همواره مثبت است؟

حل : از درس قبل به یاد داریم، برای اینکه عبارت درجهٔ دوم $y = ax^{۲} + bx + c$ همواره داشته باشد، باید $\Delta < ۰$ و $a > ۰$ باشد. در این عبارت، $a = ۱$ و $\Delta = m^{۲} - ۴$، بنابراین $m^{۲} - ۴ < ۰$.

جدول تعیین علامت، برای $m^{۲} - ۴$ به‌صورت زیر است :

m		-۲		۲	
$m^{۲} - ۴$	+	۰	−	۰	+

بنابراین برای اینکه $m^{۲} - ۴ < ۰$ باشد، باید $-۲ < m < ۲$.

مثال :

نامعادلهٔ $\frac{x^{۲} - ۹}{۲x + ۱} \geq ۰$ را حل می‌کنیم.

برای حل این نامعادله، عبارت $\frac{x^{۲} - ۹}{۲x + ۱}$ را تعیین علامت می‌کنیم. برای این کار ریشه های صورت و مخرج این کسر را پیدا می کنیم. ریشه های معادله $x^{۲} - ۹ = ۰$ ، ∓ ۳ هستند و ریشه معادله $۲x + ۱ = ۰$ ، $-\frac{۱}{۲}$ است . بنابراین، جدول تعیین علامت این کسر به صورت زیر است.

x		-۳		$-\frac{۱}{۲}$		۳	
$x^۲-۹$	+	۰	−		−	۰	+
$۲x+۱$	−		−	۰	+		+
$\frac{x^۲-۹}{۲x+۱}$	−	۰	+	تعریف نشده	−	۰	+

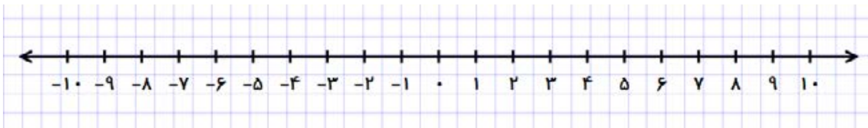
بنابراین اگر $-۳ \leq x < -\frac{۱}{۲}$ و یا $x \geq ۳$، عبارت $\frac{x^۲-۹}{۲x+۱}$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، پس مجموعه جواب این نامعادله عبارتست از : $[-۳,-\frac{۱}{۲}) \cup [۳,+\infty)$.

حل نامعادلات قدر مطلقی

می‌دانیم که $|x|$ همان فاصلهٔ x از مبدا، روی خط اعداد حقیقی است. مثلاً $|۳| = ۳$ و $|-۳| = ۳$ زیرا فاصلهٔ هردو عدد ۳ و ۳− از مبدا برابر ۳ است.

فعالیت

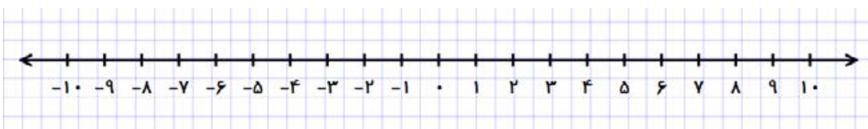
۱ــ نامعادلهٔ $|x| \leq ۳$ رادرنظر بگیرید. جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصلهٔ آنها از مبدأ کوچک‌تر یا مساوی ۳ باشد. این اعداد را روی محور زیر نمایش دهید.



مجموعهٔ مقادیری که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید را به‌صورت بازه بنویسید.

....

۲ــ نامعادلهٔ $|x| \geq ۳$ را درنظر بگیرید. جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصلهٔ آنها از مبدأ بزرگ‌تر یا مساوی ۳ باشند، این اعداد را روی محور زیر نشان دهید.



مجموعهٔ این مقادیر که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید را به‌صورت بازه بنویسید.

....

۳ــ با استفاده از مراحل بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پرکنید.

$$\begin{cases} |x| \le ۳ \Rightarrow \quad \ldots \le x \le \ldots \quad \Rightarrow \\ |x| \ge ۳ \Rightarrow x \ge \ldots \text{ یا } x \le \ldots \Rightarrow \end{cases}$$

مجموعه جواب (به شکل بازه) = ...

مجموعه جواب (به شکل بازه) = ...

اگر a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد، سپس[۵]

۱ــ اگر $|u| \le a$ سپس $-a \le u \le a$.

۲ــ اگر $|u| \ge a$ سپس $\begin{cases} u \ge a \\ u \le -a \end{cases}$.

مثال :

نامعادلات زیر را حل می‌کنیم.

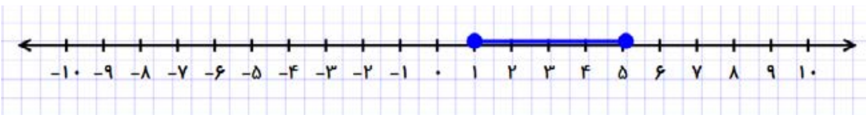
الف) $|x-۳| \le ۲$

ب) $|۲x-۱| > ۵$

برای حل نامعادله الف ، با استفاده از خواص قدر مطلق آنرا به یک نا معادله دوگانه تبدیل می کنیم : $-۲ \le x-۳ \le ۲$ اکنون داریم :

$$-۲ \le x-۳ \le ۲ \Rightarrow ۱ \le x \le ۵.$$

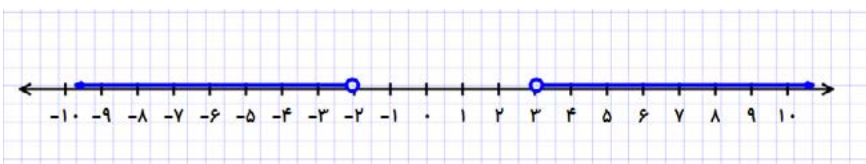
پس مجموعه جواب این نامعادله، بازهٔ $[۱,۵]$ است و نمایش هندسی آن به‌صورت زیر می‌باشد.



برای حل نامعادله ب نیز از خواص قدر مطلق استفاده می کنیم و داریم :

$$|۲x-۱| > ۵ \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۱ > ۵ \Rightarrow ۲x > ۶ \Rightarrow x > ۳ \\ ۲x-۱ < -۵ \Rightarrow ۲x < -۴ \Rightarrow x < -۲ \end{cases}$$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله عبارتست از : $(-\infty,-۲) \cup (۳,+\infty)$ و نمایش هندسی این جواب نیز به صورت زیر است.



۵ــ در هریک از این نامعادلات، اگر علامت مساوی وجود نداشته باشد، هیچ کدام از جواب‌ها نیز علامت مساوی ندارند.

کار در کلاس

۱ــ در هریک از نامعادلات زیر، مجموعه جواب هرکدام را به شکل بازه و هندسی نمایش دهید.

الف) $|\frac{x}{۳}+۱|<\frac{۲}{۳}$

ب) $|۵-۲x|\geq ۱$

۲ــ یک نامعادله‌ی قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن بازهٔ (۲،۹) باشد.

۳ــ یک نامعادلهٔ قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن $(-\infty,۳]\cup[۶,+\infty)$ باشد.

تمرین

۱ــ در هریک از نامعادلات زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

الف) $۱<۲x-۳\leq ۳$

ب) $\begin{cases} ۳-۲x<۰ \\ x^۲\leq x \end{cases}$

ج) $-۲<\frac{۵-x}{۲}<۰$

د) $\frac{۴-۲x}{۳x+۱}\geq ۰$

هـ) $x(x^۲+۴)<۰$

و) $\frac{x^۳-x}{x^۲-۲x+۲}\leq ۰$

ز) $|۷-۲x|<۱$

ح) $|\frac{x-۱}{۲}-۱|\geq ۳$

۲ــ به ازای چه مقادیری از a، عبارت $y=x^۲+۳x+a$ همواره مثبت است؟

۳ــ به ازای چه مقادیری از m، عبارت $x^۲-mx+۱$ همواره منفی است؟

۴ــ نامعادلهٔ $x+\frac{۱}{x}\geq ۲$ را حل کنید.

۵ــ یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیهٔ t از رابطهٔ $h=-۳t^۲+۱۸t+۱۳$ محاسبه شود، در چه فاصلهٔ زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

۶ــ تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه از یک کار سنگین بدنی، طبق رابطهٔ $y=\frac{۱۵}{۸}x^۲-۳۰x+۲۰۰$ به‌دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به‌دست آمده قابل قبول هستند؟