فصل

اوّل

عبارت‌های جبری

درس ۱ چند اتحاد جبری و کاربردها

درس ۲ عبارت‌های گویا

شرح شکل‌های فصل
شرح شکل‌های فصل
شرح شکل‌های فصل
شرح شکل‌های فصل

درس ۱

چند اتحاد جبری و کاربردها

در سال قبل، با اتحادهای زیر آشنا شدید.

$$(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$$

$$(a-b)^۲=a^۲-۲ab+b^۲$$

$$(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲$$

$$(x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$$

کار در کلاس

با استفاده از اتحادهای بالا، تساوی‌های زیر را کامل کنید :

الف) $(a+۴)^۲=a^۲+\ldots+\ldots$

ب) $(۳a-۱)^۲=\ldots-۶a+\ldots$

ج) $(\sqrt{۲}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}b)^۲=۲+\cdots+\frac{۱}{۲}b^۲$

د) $(\sqrt{۳}+\cdots)(\sqrt{۳}-\cdots)=۳-۲=۱$

هـ) $(x+۴)^۲(x+۳)=x^۲+(\ldots)x+\ldots$

و) $(۳x+۲)(۳x-۵)=\ldots+(۲-۵)(۳x)+(۲)(-۵)=\ldots$

ز) $(x+\ldots)(x+\ldots)=x^۲+۳x+۲$

کار در کلاس

بعضی از محاسبات عددی را می‌توان با کمک از اتحادها، به‌راحتی به‌دست آورد. تساوی‌های زیر را کامل کنید.

الف) $(۹۹۹)^۲=(۱۰۰۰-۱)^۲=\ldots$

ب) $96\times104=(100-4)(\ldots+4)=\ldots-\ldots$

ج) $\ldots=(100+2)^2=\ldots+\ldots=$

د) یک مثال عددی نیز خودتان بزنید که برای محاسبه آن از اتحادها، کمک گرفته‌اید.

هـ) آیا کاربرد دیگری از اتحادها، به ذهن شما می‌رسد؟ لطفا توضیح دهید.

کار در کلاس

عبارت جبری $(a+b)^3$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای و حاصل ضرب عبارت‌های جبری ساده کنید.

$$(a+b)^3=(a+b)^2\,(a+b)=\ldots\ldots$$

اگر همین سؤال را برای ساده کردن $(a+b)^4$ بپرسیم، چگونه عمل می‌کنید؟ آیا این سؤال را می‌توان برای توان‌های بزرگ‌تر از ۴ نیز پرسید؟ آیا روشی وجود دارد که بتوان بدون ساده کردن عبارت‌های حاصل‌ضرب، جواب نهایی را به‌دست آورد؟

فعالیت زیر پاسخ مناسبی برای سؤال بالاست.

فعالیت

جدول زیر را درنظر بگیرید.

$(a+b)^0=1$	۱
$(a+b)^1=1a+1b$	۱ ۱
$(a+b)^2=1a^2+2ab+1b^2$	۱ ۲ ۱
$(a+b)^3=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$	۱ ۳ ۳ ۱
$(a+b)^4=\square a+\square a^3+\square a^2b^2+\square ab^3+\square b^4$	۱ ۴ ۶ ۴ ۱
$(a+b)^5=5a^{\square}+1a^{\square}b^{\square}+10a^{\square}b^{\square}+10a^{\square}b^{\square}+5ab^4+b^5$	۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
⋮	⋮

۱. در جدول بالا سمت چپ (مثلث خیام)، چه ارتباطی بین سطر دوم و سطر سوم وجود دارد؟ چه ارتباطی بین سطر سوم و سطر چهارم وجود دارد؟ چه رابطه‌ای بین سطر چهارم و سطر پنجم وجود دارد؟

۲. آیا قادرید سطرهای هفتم و هشتم را کامل کنید.

۳. چه ارتباطی بین سطرهای واقع در مثلث خیام و ضرایب عبارت‌های جبری سطرهای جدول بالا در سمت راست وجود دارد؟

۴. آیا می‌توانید ضرایب $(a+b)^4$ را در جدول سمت راست، کامل کنید؟

۵. آیا می‌توانید توان‌های a و b در عبارت $(a+b)^5$ در جدول سمت راست را کامل کنید.

۶. آیا توانسته‌اید حدس بزنید که چه ارتباطی بین اعداد سطرهای واقع در مثلث خیام و توان‌های $(a+b)$ وجود دارد؟

۷. با توجّه به اینکه $a-b=a+(-b)$، حاصل عبارت $(a-b)^3$ را براساس اتحاد $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ به‌دست آورید؟

با توجّه به مثلث خیام، اتحادهای زیر را خواهیم داشت :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b+3ab^2-b^3$$

کار در کلاس

با استفاده از اتحادهای بالا، تساوی‌های زیر را کامل کنید :

الف) $(2a+1)^3 = 8a^3 + \dots + 6a + \dots$

ب) $(\frac{1}{3}a-2)^3 = \dots - 3(\frac{1}{3}a)^2(2) + \dots - 8$

ج) $(4a-2b)^3 = \dots - \dots + \dots - 8b^3$

د) $(\dots + \dots)^3 = 27a^3 + \dots + \dots + \frac{1}{8}$

کار در کلاس

در تساوی‌های زیر، به‌جای علامت سؤال، عدد مناسب قرار دهید :

$۱=۲^{۰}$

$۱+۱=۲^{?}$

$۱+۲+۱=۲^{?}$

$۱+۳+۳+۱=۲^{?}$

$۱+۴+۶+۴+۱=۲^{?}$

– چه ارتباطی بین توان‌های عدد۲، و سطرهای واقع در مثلث خیام وجود دارد؟

– آیا می‌توانید الگویی برای توان‌های عدد ۲، برحسب سطرهای واقع در مثلث خیام حدس بزنید؟

– براساس این الگو مقدار $۲^{۱۰}$ را به‌دست آورید.

– آیا می‌توانید مانند الگوی بالا، الگوهای دیگری از مثلث خیام حدس بزنید؟

کار در کلاس

توان‌های مختلف ۱۱ را، به‌دست آورید.

$۱۱^{۰}=۱$

$۱۱^{۱}=۱۱$

$۱۱^{۲}=(۱+۱۰)^{۲}=۱+۲\times۱۰+۱۰^{۲}=۱+۲۰+۱۰۰=۱۲۱$

$۱۱^{۳}=(۱+۱۰)^{۳}=...+...+...+...=۱+۳۰+...+۱۰۰۰=۱۳۳۱$

$۱۱^{۴}=(۱+۱۰)^{۴}=۱+۴\times۱۰+...+...+۱۰^{۴}=۱۴۶۴۱$

– چه ارتباطی بین توان به‌دست آمده در $۱۱^{۲}$ و اعداد واقع در سطر سوم مثلث خیام وجود دارد؟

– چه ارتباطی بین توان به‌دست آمده در $۱۱^{۳}$ و اعداد واقع در سطر چهارم مثلث خیام وجود دارد؟

– چه ارتباطی بین توان به‌دست آمده در $۱۱^{۴}$ و اعداد واقع در سطر پنجم مثلث خیام وجود دارد؟

– آیا می‌توانید بدون هیچ‌گونه محاسبه‌ای $۱۱^{۵}$ را برحسب اعداد واقع در سطر ششم مثلث خیام به‌دست آورید؟

– چه نتیجه‌ای می‌توانید برای توان‌های مختلف ۱۱، بگیرید؟

کار در کلاس

با توجّه به اتحادهایی که تا کنون یادگرفته‌اید، اتحادهای زیر را با استفاده از حاصل‌ضرب عبارت‌های جبری بررسی کرده و تساوی دوطرف را نشان دهید. سپس عبارت کلامی این اتحادها را بنویسید.

$(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})=a^{۳}-b^{۳}$

اتحاد تفاضل مکعب دوجمله‌ای

$(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})=a^{۳}+b^{۳}$

اتحاد مجموع مکعب دوجمله‌ای

فعالیت

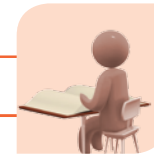
با استفاده از اتحادهای بالا، عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

$$۸y^{۳}-۱=(۲y)^{۳}-۱^{۳}=(۲y-۱)((۲y)^{۲}+(۲y)+۱^{۲})$$
$$=(۲y-۱)(\ldots+\ldots+\ldots)$$

$$۸a^{۳}+۱=(۲a)^{۳}+۱^{۳}=(\ldots+\ldots)((۲a)^{۲}-\ldots+۱)=\ldots$$

$$\ldots+b^{۳}=(۲a)^{۳}+b^{۳}=(۲a+\ldots)(\ldots-۲ab+\ldots)$$

$$t^{۶}-\frac{۱}{۸}=(t^{۲})^{۳}-(\frac{۱}{۲})^{۳}=(\ldots-\ldots)(\ldots+\ldots+\ldots)$$



تمرین

۱. با استفاده از اتحادها، حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$$(x-۱)^۲\ ,\ (y+\frac{۱}{۴})^۲\ ,\ (۲-\frac{a}{۳})^۲\ ,$$

$$(۲z-\frac{۱}{۲})^۳\ ,\ (\frac{۱}{۴}+\frac{b}{۳})^۳$$

۲. با استفاده از اتحادها، در قسمت‌های نقطه‌چین، عبارت مناسب بگذارید.

$$(a+\sqrt{۲})^۲=a^۲+\cdots+۲$$

$$(۱-۲x)^۲=۱-۴x+\ldots$$

$$(\sqrt{۳}+x)^۳=۳\sqrt{۳}+\cdots+۳\sqrt{۳}x^۲+\cdots$$

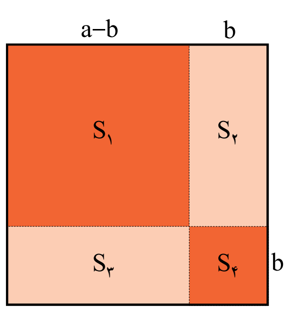
۳. به کمک اتحادها، عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^۶-۱\quad ,\quad ۱+z^۳\quad ,\quad ۸-t^۶$$

۴. کدام یک از عبارات زیر، نشان‌دهنده اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای و یا اتحاد تفاضل مکعب دوجمله‌ای است؟

$$(۳x+۵)(۹x^۲-۲۰x+۱۵)\quad ,\quad (x+۲)(x^۲-۲x+۴)$$

$$(۴x+y)(۱۶x^۲+۴xy+y^۲)\quad ,\quad (۷x-۲)(۴۹x^۲+۱۴x+۴)$$



۵. مربع روبه‌رو را که اندازه ضلع آن a است درنظر بگیرید و فرض کنید مساحت آن برابر با S است. ضلع آن را به دو پاره‌خط تقسیم کنید و طول یکی را b درنظر بگیرید.

الف) مساحت‌های $S_۱$ ، $S_۲$، $S_۳$ و $S_۴$ را به‌دست آورید.

ب) مساحت S را برحسب مساحت‌های $S_۱$ ، $S_۲$، $S_۳$ و $S_۴$ به‌دست آورید.

پ) اتحاد مربع دو جمله‌ای را از قسمت (ب) نتیجه بگیرید؟

۶. با استفاده از اتحادهای خوانده شده عبارت‌های عددی زیر را به‌دست آورید؟

$$(۹۹)^۳=(۱۰۰-۱)^۳=\ldots \qquad (۱۰۰۱)^۳=\ldots$$

توضیح در مورد مثلث خیام

در اینجا باید به رخداد مهمی که با شناسایی کتاب جبر و مقابله خیام در اروپا صورت گرفت بپردازیم. همه ما می‌دانیم که صورت بسط یافته معادله دوجمله‌ای به طراحی مثلثی عددی می‌انجامد که پیش از این مثلث نیوتن ــ پاسکال نامیده می‌شد. در اواسط قرن بیستم دانشمندان اروپایی علاقه‌مند به بررسی تاریخ ریاضیات در سرزمین‌های اسلامی از خود پرسیدند آیا ممکن است این روش بسط دوجمله‌ای‌ها در سرزمین‌های اسلامی و به وسیله دانشمندان اسلامی نیز صورت گرفته باشد، نخستین بررسی‌ها به حضور این بسط در کتاب مفتاح‌الحساب غیاث‌الدین جمشید کاشانی رسید و در ادامه روشن شد این بسط به دانشمندی پیش از کاشانی یعنی خواجه‌نصیرالدین طوسی باز می‌گردد و در فصل اول از کتاب جوامع‌الحساب طوسی دیده می‌شود. ادامه پژوهش‌ها نیز ردپای این بسط را به کتاب جبر و مقابله خیام رساند و مشخص شد برای اولین بار در سرزمین‌های اسلامی و حدوداً شش قرن قبل از نیوتن، خیام این دو جمله‌ای را در کتاب خود بسط داده است.

---

۱. حکیم، عمرخیام علی‌اکبر ولایتی ــ انتشارات آفتاب، تهران. ۱۳۸۹.

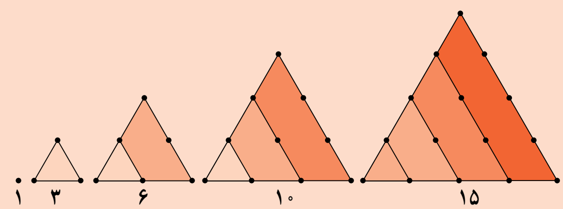
ابوعلی‌سینا، دانشمند مسلمان ایرانی که در قرن سوم و چهارم هجری قمری زندگی می‌کرده است در کتاب شفا، صحبت از اعداد مثلثی، اعداد مربعی، اعداد مخمسی و … به بیان آورده است و راجع به خواص آنها، نکاتی را ذکر کرده است.

در زیر اعداد مثلثی و اعداد مربعی، به همراه جمله‌ای به زبان خود ابوعلی‌سینا در مورد رابطه بین این اعداد آورده شده است.

همانگونه که مشاهده می‌کنید ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، … اعداد مثلثی و ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، … اعداد مربعی می‌باشند.

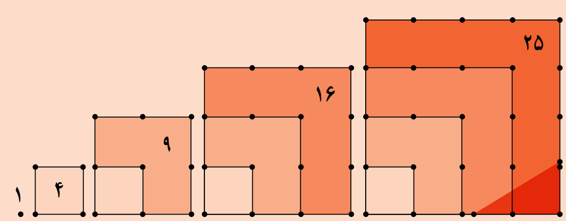
حال مثلث خیام را یک بار دیگر نگاه کنید.

عددهای مثلثی



این اعداد در این مثلث قابل مشاهده هستند و می‌توان یک الگو براساس اعداد و واقع در مثلث خیام برای سایر اعداد به‌دست آورد.

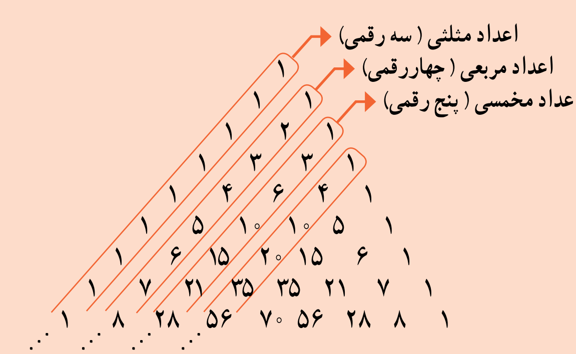
عددهای مربعی



فَیَکونُ کُلُّ مُرَبَّعٍ مِن مُثَلَّثٍ فی دَرَجَتِهِ وَ مُثَلَّثٍ أنقَصَ مِن دَرَجَتِهِ بِواحِدٍ

مجموع هر عدد مثلّث و عدد مثلث ماقبل آن مساوی است با عدد مربع همان مرتبه

مثلث خیام



درس ۲

عبارت‌های گویا

در سال گذشته با عبارت‌های گویا و ساده کردن آنها همچنین با جمع و تفریق این عبارات آشنا شدید، از آن جا که امسال، چند اتحاد دیگر را آموختید در ادامه به یادآوری و تکمیل این مطالب می‌پردازیم.

کسرهایی که صورت و مخرج آنها چندجمله‌ای باشند، عبارت‌های گویا می‌نامند، چنان‌چه صورت یا مخرج کسری، چندجمله‌ای نباشد در این صورت آن عبارت‌گویا نیست.

فعالیت

عبارت‌های گویا را با ☑ و عبارت‌های غیرگویا را با ☒ مشخص کنید.

$\frac{x-۳}{۲x^۲-۳x+۵}$ ☐ $\frac{۱}{x^۴-\sqrt{۲}}$ ☐ $\sqrt{x^۲+۱}$ ☐

$x^۲+۳x-۴$ ☐ $\frac{\sqrt{۵}x}{x}$ ☐ $\frac{x+y}{۳\sqrt{z}}$ ☐

$\frac{|x|}{x^۲+۲}$ ☐ $\sqrt{x}$ ☐ $\frac{x+y}{۳\sqrt{z}}$ ☐

مقدار یک عبارت گویا وقتی با معنی است که مخرجش صفر نباشد. یعنی در حالتی که مخرج یک عبارت گویا صفر شود، آنگاه مقدار عبارت گویا تعریف نشده است. برای مثال عبارت گویای $\frac{x+۲}{x-۵}$ به‌ازای $x=۵$ تعریف نشده است، زیرا با قراردادن $x=۵$ در آن، مخرج کسر برابر با صفر می‌شود و در این حالت کسر تعریف نشده است.

کار در کلاس

کدام‌یک از عبارت‌های زیر گویا و کدام‌یک غیرگویا هستند؟ سپس عبارت‌های گویا به‌ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند؟

الف) $\frac{3z+5}{3z-5}$ ب) $\frac{x+9}{\sqrt{x}-3}$ پ) $\frac{4x^2-5x+1}{7\sqrt{2}}$ پ) $\frac{4x^2-5x+1}{7\sqrt{2}}$

ت) $\frac{a^2+3}{a^2-4}$ ث) $\frac{x\sqrt{x}+1}{3-x}$ ت) $\frac{5x^2+1}{x^2+1}$

ساده‌کردن عبارت‌های گویا

اگر a و b و k عددهایی حقیقی باشند، به‌طوری که $b,k\neq 0$ در این صورت داریم:

$$\frac{Ka}{Kb}=\frac{a}{b}(k,b\neq 0)$$

زیرا با تقسیم صورت و مخرج کسر بر $k\neq 0$، کسر را ساده کرده‌ایم:

$$\frac{Ka}{Kb}=\frac{Ka}{\frac{Kb}{K}}=\frac{a}{b}$$

برای ساده‌کردن یک عبارت گویا، ابتدا باید صورت و مخرج آن را تا حد امکان تجزیه کنیم. سپس با خط کشیدن روی عوامل مشترک از صورت و مخرج کسر، عبارت گویا ساده می‌شود. (یادآوری می‌کنیم، عامل مشترکی که از صورت و مخرج کسر خط می‌زنیم باید مخالف با صفر باشد.)

کار در کلاس

۱. مانند نمونه‌های حل‌شده، کسرهای زیر را ساده کنید. صورت کسر را به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای و مخرج کسر را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کرده‌ایم.

الف) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}=\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)}$

$$=\frac{(x+3)\cancel{(x+3)}}{(x-3)\cancel{(x+3)}}$$

با شرط $x+3\neq 0$ از صورت و مخرج کسر عامل $(x+3)$ را خط زده‌ایم، توجه کنید که برای بامعنی‌بودن کسر باید $x-3\neq 0$.

$$=\frac{(x+3)}{(x-3)}$$ (ساده‌شدهٔ کسر)

صورت کسر را به کمک اتحاد تفاضل مکعب دوجمله‌ای و مخرج کسر را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کنید.

ب) $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\dfrac{(\ \ -\ \ )(\ \ +\ \ +\ \ )}{(\ \ -\ \ )(\ \ +\ \ )}$

با شرط $x-3\neq 0$ از صورت و مخرج کسر عامل $(x-1)$ را خط بزنید. توجه کنید که برای بامعنی‌بودن کسر باید $x+1\neq 0$.

$$=\frac{(x-1)(\ \ +\ \ +\ \ )}{(x-1)(\ \ +\ \ +\ \ )}$$

(سادهٔ کسر) $=$ ــــــــــــ

پ) $\dfrac{4x^2-9}{4x^2+10x+6}$

ت $\dfrac{x^4-8x}{2x^2-8x+8}$

ث) $\dfrac{6x^5(x^2+4)^2-4x^3(x^2+4)^3}{x^8-16x^4}$

۲. کسر زیر به‌صورت نادرست ساده شده است، ایراد را پیدا کنید و دربارهٔ آن توضیح دهید.

$$\frac{2x^3+y^2}{y^2}=\frac{2x^3+\cancel{y^2}}{\cancel{y^2}}=2x^3+1$$

۳. می‌دانیم پارسا x ریال و نیما y ریال پول دارند. به‌طوری که $x>y$ در این صورت عدد مثبتی مانند p وجود دارد به‌طوری که داریم:

$x=y+p \qquad (p>0)$

علی با تقسیم دو طرف این تساوی بر $x-y>0$ ثابت کرده است که مقدار پول‌های پارسا و نیما برابرند، یعنی $x=y$.
در این استدلال یک اشتباه رخ داده است، آن را پیدا کنید.

$$\frac{x}{x-y}=\frac{x+p}{x-y}$$

$$x(x-y)=(x-y)(y-p)$$

$$x^2-xy=xy+px-y^2-py$$

$$x^2-xy-px=xy-y^2-py$$

$$x(x-y-p)=y(x-y-p)$$

$$\frac{x}{y}=\frac{\cancel{(x-y=p)}}{\cancel{(x-y=p)}}=1$$

$$\frac{x}{y}=1\Rightarrow x=y$$

جمع و تفریق عبارت‌های گویا

بـرای جمـع و تفریق عبارت‌های گویـا ابتدا باید مخرج مشــترک‌گیری کنیم. برای ایـن منظور ابتدا با انجـام فعالیـت زیر مفهوم مخرج مشــترک را درک می‌کنید، سـپس در ادامه جمع و تفریـق عبارت‌های گویا می‌آید.

فعالیت

چندجمله‌ای‌های $P(x) = x^{۲} - ۲x + ۱$ و $Q(x) = x^{۲} + ۵x - ۶$ را در نظر بگیرید.

۱. چندجمله‌ای‌های بالا را تجزیه کنید.

۲. عبارت‌های مشترک در تجزیه این دو چندجمله‌ای را مشخص کنید.

۳. عبارت‌های غیرمشترک در تجزیه این دو چندجمله‌ای را مشخص کنید.

۴. حاصل‌ضرب عبارت‌های مشــترک با بزرگ‌ترین توان را در عبارت‌های غیرمشــترک پیدا کنید و آن را $A(x)$ بنامید.

۵. عبارت‌های $\frac{A(x)}{P(x)}$, $\frac{A(x)}{Q(x)}$ را ساده کنید.

۶. با توجه به قسمت قبل آیا $A(x)$ مضرب مشترک دو عبارت $P(x)$ و $Q(x)$ است.

۷. آیا می‌توانید مضرب‌های مشترک دیگری برای $P(x)$ و $Q(x)$ پیدا کنید.

۸. از بین مضرب‌های مشترکی که برای $P(x)$ و $Q(x)$ یافتید، کدام یک نسبت به متغیر x از درجهٔ کوچک‌تر است؟

برای پیدا کردن مضرب مشــترک دو چندجملـه‌ای $P(x)$ و $Q(x)$ به‌طوری که نســبت به x از کوچک‌ترین درجه باشــد، ابتدا هریک از چندجمله‌ای‌ها را تجزیه می‌کنیم؛ سپس حاصل‌ضرب عبارت‌های مشترک با بزرگ‌ترین توان در عبارت‌های غیرمشترک را به‌دست می‌آوریم و آن را $A(x)$ می‌نامیم. برای جمع یا تفریق دو عبارت گویا که مخرج‌های آنها $P(x)$ و $Q(x)$ باشــند؛ عبارت $A(x)$ را مخرج مشترک دو کسر تعریف می‌کنیم.

کار در کلاس

۱. در هر قسمت مضرب مشترکی از چندجمله‌ای‌ها را به‌دست آورید به‌طوری که نسبت به x متغیر آن از کوچک‌ترین توان باشند.

الف) $P(x) = x^۲+۶x+۹$

$Q(x) = x۲ - ۹$

ب) $P(x) = a^۴-b^۴$

$Q(x) = a^۳-b^۳$

پ) $P(x) = a^۴+۲a^۳-۳a^۲=a^۲(\quad+\quad-۳)=a^۲(\quad-۱)\ (a+\quad)$

$Q(x) = a^۳+۸a^۲+۱۵a=a(\quad+\quad+)=a\,(a+\quad)(a+\quad)$

جواب $=\underbrace{a^۲(a+\qquad)}_{\text{حاصل ضرب عبارت‌های مشترک با بزرگ‌ترین توان}}\times\underbrace{(a-۱)\ (a+\qquad)}_{\text{حاصل‌ضرب عبارت‌های غیرمشترک}}$

۲. برای جمع و تفریق عبارت‌های گویا، ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم، مخرج مشترک همان مضرب مشترک بین مخرج‌ها با کوچک‌ترین توان نسبت به x است، در زیر مخرج مشترک کسرها را مانند نمونه پیدا کنید.

الف) $\dfrac{۴}{x^۲+x}+\dfrac{x-۱}{x^۲-۱}$

مخرج کسر اول $A(x)+x^۲+x=x(x+۱)$

مخرج کسر دوم $B(x)+x^۲-۱=(x-۱)(x+۱)$

مخرج مشترک $=x(x-۱)(x+۱)$

ب) $\dfrac{x-۲}{x-۳}-\dfrac{x+۱}{x+۲}$

پ) $\dfrac{۱}{x^۲-۲x}-\dfrac{۱+x}{x}+\dfrac{x+۲}{x-۲}$

فعالیت

عبارت $P(x)=\dfrac{۴}{x^۲+x}+\dfrac{x}{x^۲-۱}$ را در نظر بگیرید؛ با توجه به کار در کلاس قبل، مخرج مشترک این

دو کسر برابر است با : $x(x-۱)\,(x+۱) =$ مخرج مشترک

زیرا :
$$P(x)=\frac{۴}{x(x+۱)}+\frac{x}{(x-۱)(x+۱)}$$

۱. مخرج کسر اول را با مخرج مشترک مقایسه کنید؛ برای اینکه مخرج کسر اول مانند مخرج مشترک شود، باید صورت و مخرج کسر اول را در چه عبارتی ضرب کرد؟ این کار را انجام دهید.

$$\frac{۴}{x(x+۱)}=\underline{\qquad\qquad}$$

۲. برای اینکه مخرج کسر دوم مانند مخرج مشترک شود، باید صورت و مخرج کسر دوم را در کدام عبارت ضرب کرد؟ این کار را انجام دهید.

$$\frac{x}{(x-۱)(x+۱)}=\underline{\qquad\qquad}$$

۳. همان‌طورکه می‌بینید، مخرج کسرهای اول و دوم یکسان شده‌اند، در زیر این دو کسر را با هم جمع کرده‌ایم، جاهای خالی را پُر کنید.

$$P(x)=\frac{۴(x-۱)+x^۲}{x(x-۱)(x+۱)}=\frac{\qquad\qquad}{x(x-۱)(x+۱)}$$

کار در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{x-۱}$

می دانیم مخرج مشترک این دو کسر برابر با : $(x-۱)\,(x+۱)$ است، بنابراین داریم :

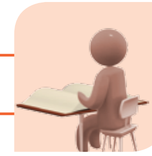
$$\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{x-۱}=\frac{(x-۱)}{(x+۱)(x-۱)}+\frac{x+۱}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{\qquad\qquad}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{۲x}{\qquad}$$

ب) $\frac{y+۸}{y^۲+y-۲}+\frac{y-۲}{y^۲+۲y}=\frac{y+۸}{(y+۲)(y-\quad)}+\frac{y-۲}{y(\quad+\quad)}$

$$=\frac{\qquad\qquad}{y(y+۲)(y-۱)}+\frac{\qquad\qquad}{y(y+۲)(y-۱)}$$

پ) $\frac{۴+x^۲-۲x}{۲+x}-x-۲$

ت) $\frac{۲x+۳}{۲x-۲}-\frac{۵}{x^۲-۱}-\frac{۲x-۳}{۲x+۲}$



تمرین

عبارت‌های گویا زیر به‌ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند.

۱) $\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}-۱}$ ۲) $\frac{۲x^{۲}+۱}{x^{۲}+۳x-۴}$ ۳) $\frac{۵}{x^{۲}+x}$

۴) $\frac{x^{۳}+۳x^{۲}+۲x}{x(x+۱)(x^{۲}-۴)}$ ۵) $\frac{۳x^{۲}y+۶xy^{۲}}{x^{۲}-۴y^{۲}}$ ۶) $\frac{۴۲a^{۳}-۳۰a^{۳}m}{۳۵am^{۲}-۲۵m^{۳}a}$

۷) $\frac{b^{۳}x^{۴}-ab^{۳}x^{۳}}{a^{۲}b^{۲}x^{۲}-a^{۳}b^{۲}x}$ ۸) $\frac{x^{۶}-a^{۶}}{ax^{۳}-a^{۳}x}$

۹. فرض کنیم x=۱ دانش‌آموزی با توجه به این فرض، ثابت کرده است که ۱=۲، استدلال زیر را دنبال کنید و بگویید اشتباه در کجا اتفاق افتاده است.

$x=۱$

$x^{۲}=x$

$۱-x=۱-x^{۲}$

$$\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}=\frac{\cancel{x-۱}}{\cancel{x-۱}}$$

$$\frac{(\cancel{x-۱})(x+۱)}{\cancel{x-۱}}=۱$$

$$x+۱=۱\xrightarrow{x=۱}۲=۱$$

حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

۱۰) $\frac{۴}{۹x}-\frac{۵x}{۶y^{۲}}+۱$ ۱۱) $\frac{x+۱}{x-۱}-۱$

۱۲) $\frac{\frac{۱}{m}+۱}{m+۱}$ ۱۳) $\frac{۲x}{x^{۲}-y^{۲}}+\frac{۱}{x+y}-\frac{۱}{x-y}$

۱۴) $\frac{x+۳}{x^{۲}-۶x+۹}-\frac{x+۲}{x^{۲}-۹}-\frac{۵}{۳-x}$ ۱۵) $\frac{y-۳}{y^{۲}-۴}-\frac{y+۲}{y^{۲}-۴y+۴}-\frac{۲}{۲-y}$