

فصل اول:

## ترسیم‌های هندسی و استدلال



## ترسیم‌های هندسی



انسان از دوران باستان تاکنون همواره از هندسه و بویژه از ترسیم‌های هندسی برای حل مسائل مختلف یاری گرفته است.  
از تقسیم‌بندی زمین‌های کشاورزی تا طراحی انواع ابزارهای کاربردی مدرن کنونی، همگی نیازمند ترسیم‌های هندسی هستند.

### فعالیت

(برای انجام مراحل زیر از خطکش و پرگار استفاده نمایید.)

۱- نقطه‌ای مانند  $O$  در صفحه در نظر بگیرید و از خط‌کش و پرگار استفاده نمایید.

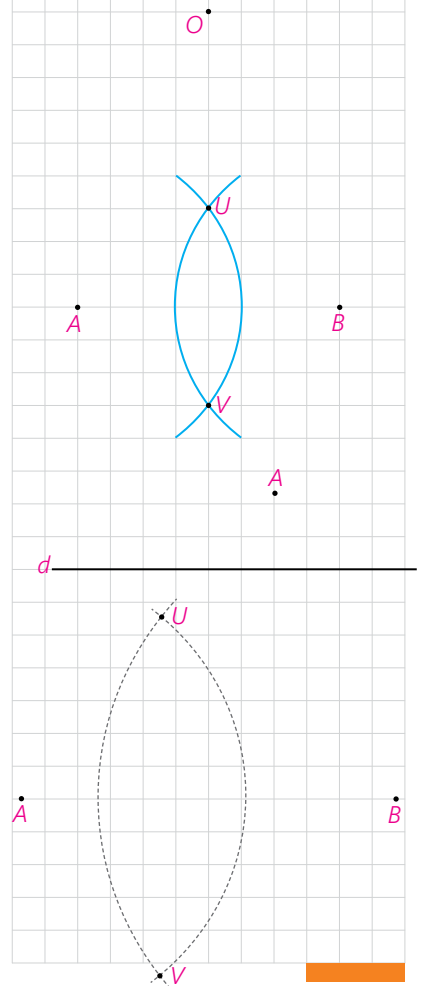
نقاطی را مشخص کنید که فاصله یکسانی از نقطه  $O$  دارند؟ (مثلاً همه نقاطی که فاصله‌شان از نقطه  $O$  برابر ۲ سانتی‌متر است.)

۲- نقاط  $A$  و  $B$  را در نظر بگیرید. دهانه پرگار را بیش از نصف طول پاره خط  $AB$  باز کنید و یک‌بار به مرکز  $A$  و بار دیگر به مرکز  $B$  و با همان شعاع قبلی کمان بزنید تا یکدیگر را در نقاط  $U$  و  $V$  قطع کنند.  $U$  و  $V$  چه ویژگی مشترکی دارند؟

۳- نقطه  $A$  مانند شکل مقابل به فاصله ۱ از خط  $d$  قرار دارد. نقاطی از خط  $d$  را بیابید که به فاصله ۲ سانتی‌متر از نقطه  $A$  باشند.

۴- نقاط  $A$  و  $B$  را به فاصله ۵ سانتی‌متر از هم در نظر بگیرید. دهانه پرگار را به اندازه ۳ سانتی‌متر باز کرده و از نقطه  $A$  یک کمان بزنید. سپس دهانه پرگار را به اندازه ۴ سانتی‌متر باز کرده و از نقطه  $B$  یک کمان بزنید.

الف) نقاط روی کمان اول چه ویژگی مشترکی دارند؟



ب) نقاط روی کمان دوم چه ویژگی مشترکی دارند؟

پ) نقاط تقاطع دو کمان فاصله‌شان از نقاط A و B چگونه است؟ برای اینکه چنین نقاط تقاطعی وجود داشته باشد، اندازه شعاع آنها و فاصله نقاط A و B چه شرطی باید داشته باشند؟

ت) طول اضلاع مثلث AUB چقدر است؟

### کاردرکلاس

۱- دو نقطه مانند A و B را به فاصله ۳ سانتی متر از هم در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A، ۲ و از B،  $\frac{2}{5}$  سانتی متر باشد.

۲- توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۶ واحد رسم کرد.

۳- جاهای خالی را به گونه‌ای کامل کنید که مسئله زیر:

الف) دو جواب داشته باشد.

ب) یک جواب داشته باشد.

پ) جواب نداشته باشد.

نقاط A و B به فاصله ..... از هم هستند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه A برابر ..... و از نقطه B برابر ..... باشد.

### برخی خواص نیمساز و ترسیم آن

#### فعالیت

۱- زاویه  $xOy$  و نیم خط  $Oz$  را نیمساز آن در نظر بگیرید. فرض کنید نقطه A نقطه‌ای دلخواه روی  $Oz$  باشد. ثابت کنید که فاصله نقطه A از دو ضلع زاویه  $xOy$  باهم برابر است.

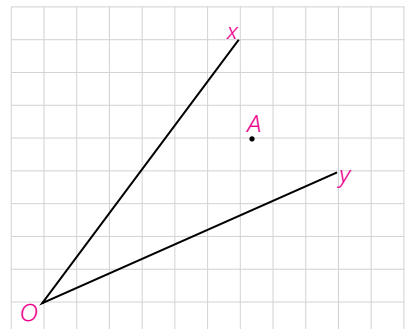
(یعنی اگر از نقطه A عمودهایی بر نیم خط‌های  $Ox$ ،  $Oy$  رسم کنیم طول آنها باهم برابر است)

#### نتیجه ۱

اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد .....



۲- زاویه  $xOy$  و نقطه  $A$  را چنان در نظر می‌گیریم که فاصله نقطه  $A$  از نیم خط‌های  $Ox$  و  $Oy$  باهم برابر باشد.  
 نشان دهید که نقطه  $A$  روی نیمساز زاویه  $xOy$  قرار دارد.  
 (راهنمایی: پاره خط  $OA$ ، و دو عمود از نقطه  $A$  بر خطوط  $Ox$  و  $Oy$  رسم کنید و نشان دهید پاره خط  $OA$  همان نیمساز  $xOy$  است.)



### نتیجه ۲

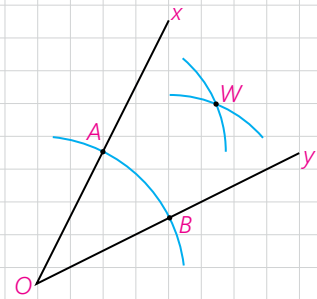
اگر نقطه‌ای به فاصله یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه قرار دارد.....

### نتیجه

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی ..... یک زاویه قرار داشته باشد ..... و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد روی ..... آن زاویه قرار دارد.

### فعالیت

- زاویه  $xOy$  را در نظر گرفته، دهانه پرگار را کمی باز کنید و به مرکز  $O$  کمانی بزنید تا نیم خط‌های  $Ox$  و  $Oy$  را به ترتیب در نقاط  $A$  و  $B$  قطع کند.  
 - طول پاره خط‌های  $OA$  و  $OB$  نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
- دهانه پرگار را کمی باز کنید (بیش از نصف طول  $AB$ ) و یک بار به مرکز  $A$  و بار دیگر با همان اندازه و به مرکز  $B$  یک کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل در نقطه‌ای مانند  $W$  همدیگر را قطع کنند.  
 - طول پاره خط‌های  $AW$  و  $BW$  نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
- پاره خط‌های  $WA$  و  $WB$  و  $WO$  را رسم کنید. دو مثلث  $OAW$  و  $OBW$  نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
- اندازه زوایه‌های  $AOW$  و  $BOW$  نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
- پاره خط  $OW$  برای زاویه  $xOy$  چه نوع پاره خطی است؟



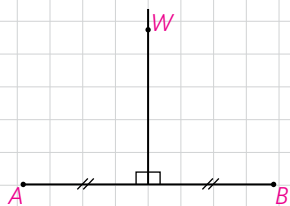
### کاردرکلاس

روش رسم نیمساز یک زاویه داده شده را توضیح دهید.

## برخی خواص عمودمنصف و ترسیم آن

### فعالیت

۱- پاره خط  $AB$  و عمودمنصف آن را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید و فرض کنید  $W$  نقطه‌ای روی عمودمنصف  $AB$  باشد. نشان دهید نقطه  $W$  از دوسر پاره خط  $AB$  به یک فاصله است.

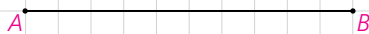


### نتیجه ۱

اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره خط قرار داشته باشد، از دوسر آن پاره خط .....

۲- پاره خط  $AB$  و نقطه  $W$  را به گونه‌ای در نظر بگیرید که نقطه  $W$  از  $A$  و  $B$  به یک فاصله باشد (یعنی  $WA = WB$ ) نشان دهید  $W$  روی عمودمنصف  $AB$  قرار دارد.

$W$ .



(راهنمایی: از نقطه  $W$  به  $A$  و  $B$  و به وسط پاره خط  $AB$  وصل کنید و نشان دهید مثلث‌های ایجاد شده باهم هم‌نهشت هستند و از این مطلب استفاده کنید و نشان دهید  $W$  روی عمودمنصف پاره خط  $AB$  قرار دارد.)

### نتیجه ۲

اگر نقطه‌ای از دوسر یک پاره خط به یک فاصله باشد .....

### نتیجه

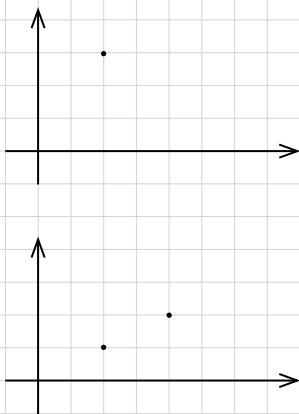
از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره خط باشد ..... و هر نقطه که ..... روی عمودمنصف .....

### فعالیت

۱- یک نقطه در صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از نقطه مورد نظر بگذرد؟

۲- دو نقطه در یک صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن دو نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطه مورد نظر بگذرد؟

۳- به نظر شما برای اینکه یک خط به طور کامل مشخص باشد حداقل چند نقطه از آن خط را باید داشته باشیم؟



### فعالیت

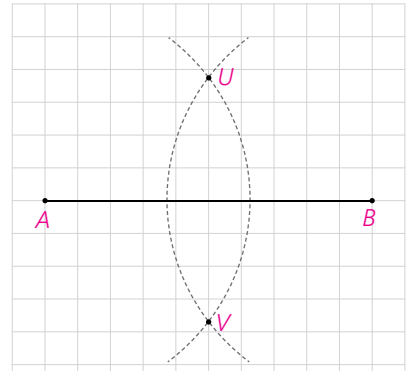
پاره خط  $AB$  را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید.  
 ۱- دهانه پرگار را بیش از نصف طول  $AB$  باز کرده و یک بار از نقطه  $A$  و بار دیگر با همان اندازه از نقطه  $B$  کمان بزنید تا یکدیگر را در دو نقطه مانند  $U$  و  $V$  قطع کنند.

۲- طول پاره خط‌های  $AU$  و  $BU$  نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۳- طول پاره خط‌های  $AV$  و  $BV$  نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۴- آیا می‌توان گفت نقاط  $U$  و  $V$  روی عمودمنصف پاره خط  $AB$  قرار دارند؟ چرا؟

۵- عمودمنصف پاره خط  $AB$  را رسم کنید.



### کاردکلاس

مراحل رسم عمودمنصف یک پاره خط داده شده را توضیح دهید.

### رسم خط عمود بر یک خط و رسم خط موازی با یک خط

### فعالیت

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

خط  $d$  و نقطه  $M$  را روی آن، مانند شکل مقابل در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از  $M$  بگذرد و بر  $d$  عمود باشد.

۱- به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط  $A$  و  $B$  را روی خط  $d$  بیابید به گونه‌ای که  $M$  وسط پاره خط  $AB$  باشد.

۲- عمودمنصف پاره خط  $AB$  را رسم کنید.

۳- عمودمنصف پاره خط  $AB$  خطی است که بر خط  $d$  ..... و از نقطه

.....

### کاردکلاس

مراحل رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن را توضیح دهید.



### فعالیت

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن  
خط  $d$  و نقطه  $T$  را غیر واقع بر آن، مانند شکل مقابل در نظر بگیرید.  
می خواهیم خطی بکشیم که از  $T$  بگذرد و بر خط  $d$  عمود باشد.

۱- به کمک پرگار چگونه می توانید نقاط  $A$  و  $B$  را روی خط  $d$  به گونه‌ای بیابید  
که از نقطه  $T$  به یک فاصله باشند.

۲- عمود منصف پاره خط  $AB$  را رسم کنید.

۳- آیا عمود منصف پاره خط  $AB$  از نقطه  $T$  می‌گذرد؟ چرا؟

عمود منصف پاره خط  $AB$  خطی است که بر خط  $d$  ..... و از نقطه  
.....

### کاردرکلاس

روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید.

### فعالیت

رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطه غیر واقع بر آن  
خط  $d$  و نقطه  $T$  مانند شکل مقابل داده شده‌اند.

می خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه  $T$  بگذرد و با خط  $d$  موازی باشد.

۱- خط  $d_1$  را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه  $T$  بگذرد و بر خط  $d$  عمود باشد.

۲- خط  $d_2$  را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه  $T$  بگذرد و بر خط  $d_1$  عمود باشد.

۳- خط  $d_2$  نسبت به خط  $d$  چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط  $d_1$  را مورب در نظر

بگیرید)

### کاردرکلاس

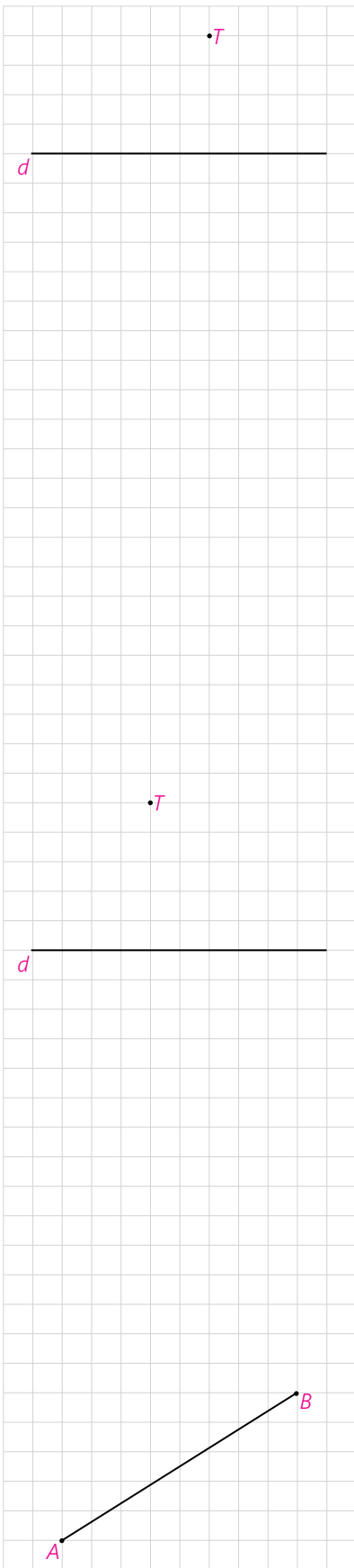
روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید.

### فعالیت

پاره خط داده شده  $AB$  در شکل مقابل را با اندازه ۴ واحد در نظر بگیرید.

الف) عمود منصف پاره خط  $AB$  را رسم کنید و فرض کنید نقطه برخورد این

عمود منصف با پاره خط  $AB$ ،  $M$  باشد.



ب) به مرکز  $M$  و به شعاع  $AM$  دایره‌ای رسم کنید تا عمود منصف  $AB$  را در نقاط  $C$  و  $D$  قطع کند.

پ) چهارضلعی  $ACBD$  چگونه چهارضلعی است؟ چرا؟

### کارد کلاس

طریقه رسم مربعی که طول قطر آن داده شده باشد را توضیح دهید.

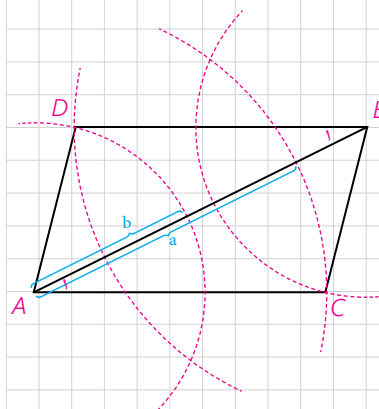


### تمرین

۱- می‌دانیم چندضلعی که قطرهاش منصف هم باشند، متوازی الاضلاع است. متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟

۲- می‌دانیم چندضلعی که قطرهاش با هم برابر و منصف هم باشد، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی‌متر باشد.

۳- پاره خط  $AB$  داده شده است. دهانه پرگار را یک بار به اندازه  $a$  و بار دیگر به اندازه  $b$  باز کرده و از نقطه  $A$  دو کمان می‌زنیم. (بطوریکه مجموع  $a$  و  $b$  از اندازه  $AB$  بزرگتر باشد) سپس کمان‌هایی با همان اندازه‌ها، این بار از نقطه  $B$  می‌زنیم و مانند شکل دو تا از نقاط برخورد را  $C$  و  $D$  می‌نامیم. چهارضلعی  $ACBD$  چه نوع چندضلعی است؟ چرا؟ (راهنمایی: ابتدا بررسی کنید که مثلث‌های  $ABC$  و  $ABD$  و زوایای  $A_1$  و  $B_1$  نسبت به هم چگونه‌اند.)



۴- متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌هایش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد.



۵- می‌دانیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند. ترسیمات زیر را انجام دهید.  
الف) لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد.

ب) لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.

۶- دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

الف) نقطه‌ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه مورد نظر ۲ واحد باشد.

ب) نقطه‌ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه مورد نظر ۴ واحد باشد.

پ) با استفاده از الف) و ب) نیمساز زاویه مورد نظر را رسم کنید.

۷- وتری مانند AB از یک دایره در نظر بگیرید. وضعیت عمودمنصف AB و مرکز

دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

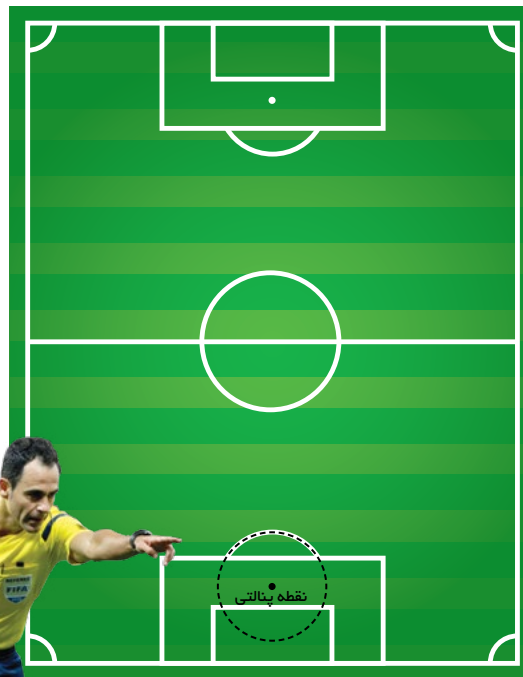
آیا می‌دانستید که در زمین فوتبال نقطه پنالتی مرکز دایره‌ای است که قسمتی از قوس

آن در جلوی محوطه جریمه کشیده شده است؟

یک داور فوتبال لحظه‌ای که اعلام پنالتی می‌کند متوجه می‌شود که نقطه پنالتی

مشخص نیست. اگر او وسایل لازم برای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد

چگونه می‌تواند با استفاده از قوس جلوی محوطه هجده قدم، نقطه پنالتی را مشخص کند.



## استدلال

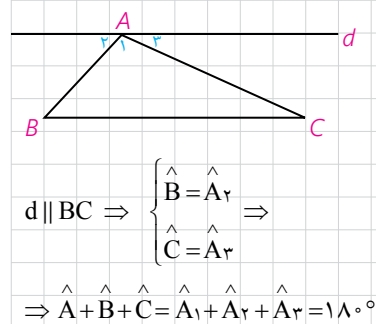
شیوه درست استدلال در زندگی هر فرد و نیز در جامعه انسانی اهمیت فراوانی دارد. استدلال نادرست در بسیاری مواقع، نتیجه‌گیری‌های غلط، تیره‌شدن روابط، ایجاد باورهای نادرست و پیامدهای خطرناک فردی و اجتماعی دیگری را در پی خواهد داشت و حتی ممکن است به ایجاد مشکلات شخصیتی در افراد منجر گردد. ممکن است فردی با استدلال‌هایی اینچنین همواره راه موفقیت را بر خود بسته ببیند:

- من در اولین امتحانم موفق نشدم، پس در امتحان‌های بعدی نیز موفق نخواهم شد.
- تیم مورد علاقه من از ابتدای فصل در تمام بازی‌هایش شکست خورده است، پس در بازی آینده نیز شکست خواهد خورد.

### ■ استقراء و استنتاج

در پایه‌های قبل تاحدی با استدلال و اثبات آشنا شدید. نوعی از استدلال که با آن مواجه گردیدید به این صورت بود که از مشاهدات و بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه‌ای کلی در آن موضوع گرفته می‌شود و یا به اصطلاح «از جزء به کل رسیدن». البته با چنین استدلالی نمی‌توان همواره به درستی نتیجه گرفته شده مطمئن بود. به‌طور مثال اگر فردی با مشاهده اینکه سه نفر از افراد یک کلاس به رنگ سبز علاقه دارند نتیجه‌گیری کند که همه افراد آن کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، فرد مورد نظر از استدلال استقرایی استفاده کرده است.

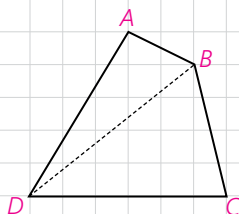
اما نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شدید براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه حقایق که درستی آنها را پذیرفته‌ایم می‌باشد و به آن استدلال استنتاجی گفته می‌شود. به‌طور مثال با دانستن رابطه بین خطوط موازی و مورب و زوایای بین آنها، اثبات اینکه مجموع زوایای داخلی یک مثلث  $180^\circ$  است به طریق مقابل، یک استدلال استنتاجی است که با نمادهای ریاضی نوشته شده است. توجه داشته باشید که یک استدلال استنتاجی را به صورت کلامی نیز می‌توان انجام داد.



به استدلال‌هایی که دو دانش‌آموز برای مسئله زیر ارائه داده‌اند دقت کنید و در مورد میزان اعتبار هر یک از آنها گفتگو کنید.

**مسئله:** مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب  $360^\circ$  است.

**پژمان:** در تمام چهارضلعی‌های مربع، مستطیل، لوزی و متوازی‌الاضلاع با توجه به اینکه زاویه‌های مجاور مکمل هستند به سادگی ثابت می‌شود که مجموع زوایای داخلی  $360^\circ$  است. بنابراین مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب  $360^\circ$  است.



**پیمان:** می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است. یک چهارضلعی دلخواه مانند ABCD در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم و دو رأس مقابل آن، مثلاً D و B را به هم وصل می‌کنیم.

مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD با مجموع زاویه‌های داخلی دو مثلث  $\triangle ABD$  و  $\triangle BCD$  برابر است بنابراین مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD برابر است با  $360^\circ$ .

پیمان ادعا می‌کند که با این استدلال ثابت می‌شود که مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی برابر  $360^\circ$  است. آیا به نظر شما این ادعای او درست است؟

آیا همین استدلال را برای هر چهارضلعی دیگری که به شما بدهند می‌توانید به کار ببرید؟ اگر جواب شما مثبت است پس این خاصیت را که «مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD در مسئله قبل برابر  $360^\circ$  است»، به سایر چهارضلعی‌های محدب می‌توان تعمیم داد.

– نوع استدلال ارائه شده توسط هر کدام از دانش‌آموزان را بیان کنید.

**مثال:** می‌دانیم که هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

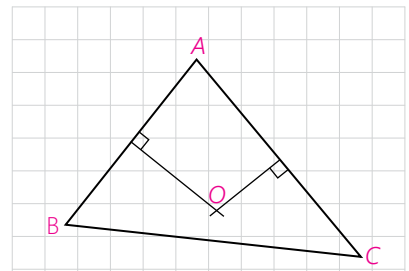
حال با کامل کردن استدلال استنتاجی آورده شده نتیجه بگیرید که سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث هم‌رس می‌باشند (در یک نقطه به هم می‌رسند).

**استدلال:** مثلث دلخواه  $ABC$  در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. چون پاره‌خط‌های  $AB$  و  $AC$  متقاطع هستند عمود منصف‌های آنها نیز در نقطه‌ای مانند  $O$  متقاطع هستند.

۱- نقطه  $O$  روی عمود منصف پاره‌خط  $AC$  است، بنابراین  $AO = CO$ .

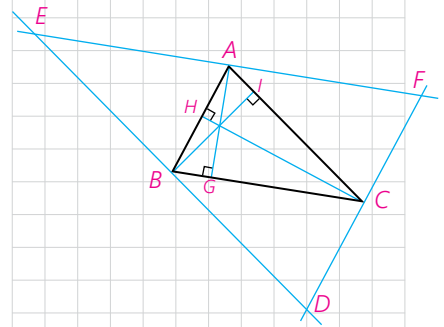
۲- نقطه  $O$  روی عمود منصف پاره‌خط  $AB$  است، بنابراین  $AO = BO$ .

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:  $BO = CO$ . بنابراین نقطه  $O$  روی  $BC$  قرار دارد. در نتیجه نقطه  $O$  محل برخورد  $\dots\dots\dots$



**مثال:** استدلال استنتاجی زیر را کامل کنید و نتیجه بگیرید که سه ارتفاع هر مثلث هم‌رس می‌باشند.

**استدلال:** مثلث دلخواه  $ABC$  را در نظر گرفته و از هر رأس آن خطی به موازات ضلع مقابل به آن رأس رسم کنید تا مطابق شکل مقابل مثلی مانند  $DEF$  به وجود آید. چهارضلعی  $ABCF$  چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟



۱  $BC = \dots\dots\dots$  بنابراین

– چهارضلعی  $ACBE$  چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟

۲  $BC = \dots\dots\dots$  بنابراین

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:  $AO = BO = CO$ . بنابراین نقطه  $A$   $\dots\dots\dots$  پاره‌خط  $EF$  است.

$$\left. \begin{array}{l} AG \perp BC \\ BC \parallel EF \end{array} \right\} \Rightarrow AG \square EF$$

لذا خط  $AG$   $\dots\dots\dots$  پاره‌خط  $EF$  است.

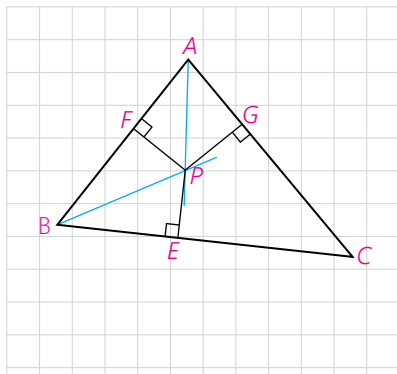
به‌طور مشابه می‌توان نشان داد:

پاره‌خط  $BI$ ،  $\dots\dots\dots$  پاره‌خط  $DE$  است.

پاره‌خط  $CH$ ،  $\dots\dots\dots$  پاره‌خط  $DF$  است.

بنابراین، ارتفاع‌های مثلث  $ABC$ ، روی عمود منصف‌های اضلاع مثلث  $\dots\dots\dots$  هستند و در نتیجه هم‌رسند.

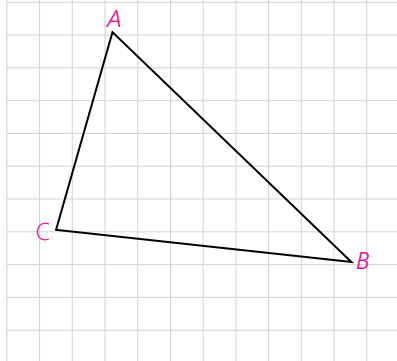
**مثال:** می‌دانیم که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. حال با کامل کردن استدلال استنتاجی آورده شده نتیجه بگیرید که نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث هم‌رس‌اند.



**استدلال:** مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. نیمسازهای زوایای A و B مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کنند. از نقطه P، مانند شکل سه عمود به اضلاع مثلث رسم می‌کنیم.

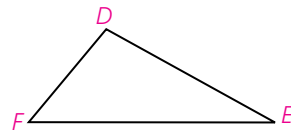
- ۱- نقطه P روی نیمساز زاویه A است، بنابراین ..... = .....
  - ۲- نقطه P روی نیمساز زاویه B است. بنابراین ..... = .....
- از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: ..... = ..... بنابراین نقطه P روی ..... در نتیجه نقطه P محل برخورد ..... است.

اضلاع			
زاویه‌ها			



**فعالیت**

به مثلث‌های زیر دقت کنید. در سطر اول جدول، نام اضلاع مثلث را به ترتیب از بزرگ به کوچک و در سطر دوم، نام زاویه‌های مثلث را نیز به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسید.



اضلاع			
زاویه‌ها			



اضلاع			
زاویه‌ها			

چه رابطه‌ای بین هر ضلع و زاویه زیر آن وجود دارد؟  
 با توجه به این رابطه در مورد یک مثلث دلخواه چه حدسی می‌توان زد؟  
 برای رسیدن به این حدس از چه نوع استدلالی استفاده کردید؟  
 آیا با این استدلال می‌توان مطمئن بود که حدس مورد نظر درست است؟

**مسئله:** اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر** است از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

**استدلال:** برای واضح شدن مطلب و کمک به حل مسئله شکل مثلث را رسم می‌کنیم. آیا می‌توان هر نوع مثلث دلخواهی کشید؟ مانند آنچه در مسئله گفته شده است مثالی می‌کشیم که دو ضلع نابرابر داشته باشد و ویژگی خاص دیگری نداشته باشد.

فرض:  $AB > AC$   
 حکم:  $\dots > \dots$

۱- در مثلث متساوی الساقین زوایای روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند.

۲- اندازه هر زاویه خارجی یک مثلث برابر است با مجموع اندازه‌های دو زاویه داخلی غیرمجاورش. بنابراین هر زاویه خارجی مثلث از هر زاویه داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.

می‌دانیم طبق فرض  $AB > AC$  لذا می‌توانیم نقطه  $D$  را روی  $AB$  جایی انتخاب کنیم که  $AC = AD$

★ اندازه زاویه‌های  $C$  و  $C_1$  نسبت به هم چگونه‌اند؟  $\hat{C} \square \hat{C}_1$

مثلث  $ADC$  چه نوع مثلثی است؟

★★ اندازه زاویه‌های  $C_1$  و  $D_1$  نسبت به هم چگونه‌اند؟  $\hat{C}_1 \square \hat{D}_1$

زاویه  $D_1$  چه نوع زاویه‌ای برای مثلث  $DBC$  است؟

★★★ اندازه زاویه‌های  $D_1$  و  $B$  نسبت به هم چگونه‌اند؟  $\hat{D}_1 \square \hat{B}$

از  $\star$  و  $\star\star$  و  $\star\star\star$  چه نتیجه‌ای در مورد اندازه زاویه‌های  $B$  و  $C$  می‌توان گرفت؟

$\hat{C} \square \hat{B}$

همانطور که مشاهده کردید در مثلثی مانند  $\triangle ABC$  فرض کردیم که ضلع  $AB > AC$  و نشان دادیم: زاویه روبه‌رو به  $AC >$  زاویه روبه‌رو به  $AB$  چرا می‌توان این موضوع را در مورد تمام مثلث‌هایی که دو ضلع نابرابر دارند پذیرفت؟

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که مانند مسئله قبل با استدلال استنتاجی حاصل می‌شوند قضیه نامیده می‌شوند.

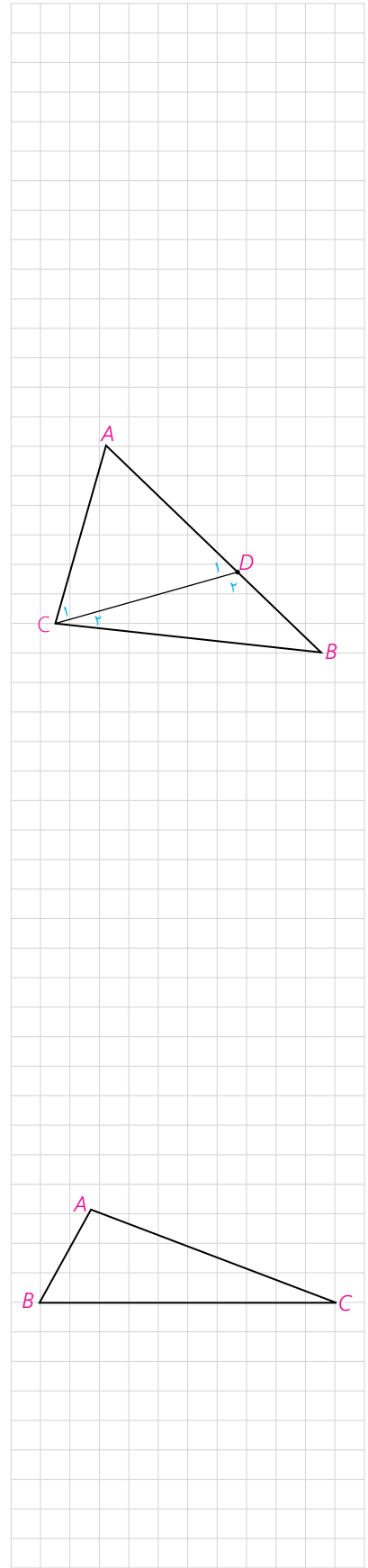
**قضیه ۱:** اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند،

زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر** است از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

فرض:  $AB < AC$

حکم:  $\hat{C} < \hat{B}$

– بار دیگر به آنچه انجام شد دقت کنید. بررسی اندازه‌های اضلاع و زوایای مثلث‌های مختلف، دقت در کشف رابطه میان این اندازه‌ها، حدس در برقراری رابطه‌ای خاص، طرح مسئله، اثبات درستی مسئله و نهایتاً نتیجه‌گیری.



بسیاری از نتایج ریاضی، طی چنین مراحل توسط علاقمندان به ریاضی حاصل شده است. مراحل این روند و حتی حدس‌ها و تفکراتی که درست نیستند اما در این مراحل صورت می‌گیرند، می‌توانند موجب ارتقاء تفکر ریاضی شوند.

اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود «عکس قضیه» گفته می‌شود. عکس یک قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

به طور مثال عکس قضیه ۱ به صورت زیر می‌باشد.

**عکس قضیه ۱:** اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.

$$\text{فرض: } \hat{C} < \hat{B}$$

$$\text{حکم: } AB < AC$$

**مثال:**

**قضیه:** اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.  
**عکس قضیه:** اگر در یک چهارضلعی قطرهای یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

**مثال:**

**قضیه:** اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

$$\text{فرض: } AB = AC$$

$$\text{حکم: } BH = CH'$$

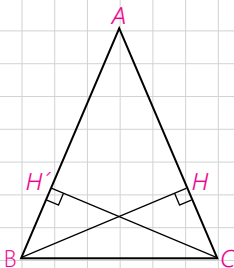
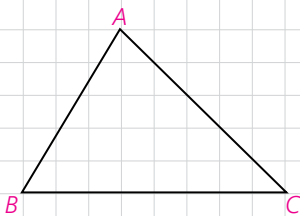
**عکس قضیه:** اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

$$\text{فرض: } BH = CH'$$

$$\text{حکم: } AB = AC$$

درواقع معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض که حکم از آن ناشی می‌شود با حکم جابجا می‌شود. مثلاً در مثال قبل مثلث بودن  $ABC$  و ارتفاع بودن  $BH$  و  $CH'$  در خود قضیه و عکس آن جزء مفروضات هستند.

عکس قضیه ۱ در صفحات بعد اثبات شده است.



**گزاره** یک جمله خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد، اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزاره ساده گفته می‌شود و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزاره ساده باشد که به آن گزاره مرکب گفته می‌شود. مثلاً گزاره‌های «فردا هوا بارانی است» و «پانزده عددی اول است» هرکدام یک گزاره ساده‌اند و «فردا هوا بارانی و پانزده یک عدد اول است» یک گزاره مرکب است.

جمله‌های زیر مثال‌هایی از گزاره هستند :

– مجموع زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  درجه است.

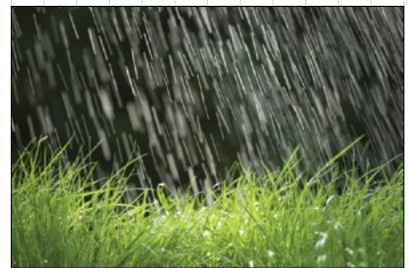
–  $2 < 3$

جمله‌های زیر گزاره نیستند :

– آیا فردا هوا بارانی است؟

– چه هوای خوبی!

– کتابت را مطالعه کن.



**نقیض یک گزاره** : همانطور که گفته شد ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست. نقیض یک گزاره مانند مثال‌های زیر ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

**مثال :**

**الف) گزاره :** «a از b بزرگ‌تر است»

**نقیض آن :** «چنین نیست که a از b بزرگ‌تر باشد» که معادل است با «a از b بزرگ‌تر

نیست» و معادل است با «a از b کوچک‌تر و یا با b برابر است»

**ب) گزاره :** «مجموع زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است.»

**نقیض آن :** «چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است» که معادل

است با «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن  $180^\circ$  نیست»

**پ) گزاره :** «یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی اش  $360^\circ$  نیست»

**نقیض :** «چنین نیست که یک چهارضلعی وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی اش

$360^\circ$  نیست» که معادل است با «هر چهارضلعی مجموع زوایای داخلی اش  $360^\circ$  است»

در برخی گزاره‌ها به جای اینکه درباره چیزی خبری قطعی داده شود، خبری که اعلام

می‌شود با یک شرط بیان می‌شود. مثلاً «اگر باران بیارد مسابقه برگزار نخواهد شد»، به

چنین گزاره‌هایی، گزاره‌های شرطی گفته می‌شود.

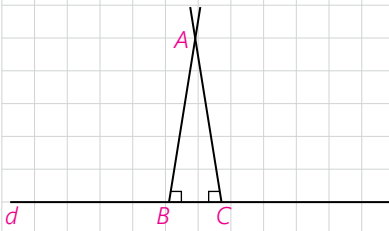


نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد، **برهان غیرمستقیم** یا **برهان خلف** است. بدین صورت که به جای اینکه به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (یا به عبارتی فرض می‌کنیم نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض یا به یک امر غیرممکن می‌رسیم.

**مثال:** از یک نقطه غیر واقع بر خط نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.  
**فرض:** نقطه‌ای مانند A غیر واقع بر خطی مانند d وجود دارد.

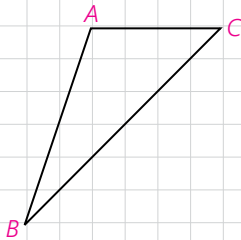
**حکم:** از نقطه A نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط d رسم کرد.

**استدلال:** با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم غلط باشد یعنی فرض می‌کنیم از نقطه A دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که مانند شکل، خط d را در نقاط B و C قطع کرده‌اند. در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث ABC بزرگ‌تر از  $180^\circ$  خواهد شد و این غیرممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطه غیر واقع بر یک خط وجود ندارد یعنی حکم نمی‌تواند غلط باشد.  
 حال می‌خواهیم عکس قضیه ۱ را با برهان غیرمستقیم ثابت کنیم.



**عکس قضیه ۱:** اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.

برای واضح شدن مسئله و کمک به حل آن، شکل مثلث را رسم می‌کنیم و با استفاده از آن فرض و حکم را می‌نویسیم.



فرض:  $\hat{A} > \hat{B}$

حکم:  $BC > AC$

**اثبات:** با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم ..... باشد. بنابراین باید..... یا.....

هر دو حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر دو حالت به تناقض منجر می‌شود.

**حالت اول:** اگر  $BC < AC$  باشد طبق قضیه ۱ باید .....، که با فرض در تناقض است.

**حالت دوم:** اگر  $BC = AC$  باشد  $\hat{A} = \hat{B}$  یک مثلث ..... خواهد بود و می‌دانیم در این حالت باید  $\hat{A} = \hat{B}$  باشد که در تناقض با فرض است. لذا هر دو حالت  $BC < AC$  و  $BC = AC$  غیرممکن هستند بنابراین  $BC > AC$  است و حکم درست است.

## قضیه‌های دوشرطی

همانگونه که دیدیم، قضیه ۱ و عکس آن هر دو درست هستند. بنابراین می‌توانیم بگوییم که:

اگر در مثلثی، دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویه بزرگتر از ضلع مقابل به زاویه کوچکتر، بزرگتر است و برعکس.

چنین قضیه‌هایی را «قضیه‌های دوشرطی» می‌نامیم.

قضیه‌های دوشرطی را می‌توان با نماد  $\Leftrightarrow$  (اگر و تنها اگر) بیان نمود. بطور مثال قضیه فوق و عکس آن را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

فرض کنیم  $\triangle ABC$  یک مثلث باشد

$$BC > AB \Leftrightarrow \hat{A} < \hat{C}$$

**مثال:** در یک مثلث، دو ضلع با هم برابرند، اگر و تنها اگر ارتفاع‌های نظیر آنها با هم برابر باشند.



## مثال نقض

نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شده‌اید استدلال با مثال نقض است. گاهی در برخی موضوعات (چه ریاضی و چه غیرریاضی) یک حکم به صورت کلی بیان می‌شود؛ بدین صورت که در مورد تمام اعضای یک مجموعه یک حکم بیان می‌شود. موارد زیر نمونه‌هایی از حکم‌های کلی می‌باشند:

**(الف)** «همه اعداد صحیح، مثبت هستند» (حکم کلی در مورد تمام اعداد صحیح)

**(ب)** «هر چهار ضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است» (حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌هایی که چهار ضلع برابر دارند)

**(پ)** «مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی  $360^\circ$  است» (حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌ها)

**(ت)** «به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ، مقدار عبارت  $n^2 + n + 41$  عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)

حدس خود را در مورد درستی یا نادرستی حکم کلی «الف» بنویسید. چگونه می‌توانید درستی حدس خود را ثابت کنید؟

می‌دانیم که  $(-2)$  یک عدد صحیح و منفی است، بنابراین حکم کلی «الف» با ارائه

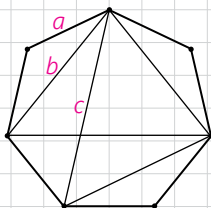
همین مثال رد می‌شود. به چنین مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی نادرست است، **مثال نقض** گفته می‌شود. در مورد درستی یا نادرستی «ب» چه می‌توانید بگویید؟

اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض بیابیم، در مورد درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟ آیا در موارد (پ) و (ت) می‌توانید مثال نقض پیدا کنید؟

آیا اگر در مورد یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض پیدا کنیم باید درستی آن حکم کلی را نتیجه‌گیری کنیم؟ در مورد (پ) مثال نقض وجود ندارد اما این برای پذیرش حکم کلی (پ) کافی نیست و باید توجه کرد که «برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید اثبات ارائه کنیم.» در مورد گزینه (ت) چه می‌توان گفت؟

اگر درستی یک حکم کلی را نتوانیم اثبات کنیم و برای رد آن مثال نقض نیز نتوانیم بیابیم، نمی‌توان در مورد درستی یا نادرستی آن حکم کلی، نتیجه‌ای گرفت.

### کاردرکلاس



۱- در شکل مقابل نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت‌ضلعی منتظم به طول ضلع  $a$  می‌باشند. فاصله هر رأس از رأس بعدی برابر  $a$  و از دومین رأس بعد از آن برابر  $b$  و از سومین رأس بعد از آن برابر  $c$  است. آیا حکم کلی زیر درست است؟ «با وصل کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی‌الساقین، حاصل می‌شود.»

۲- آیا حکم‌های کلی زیر درست است؟ چرا؟

الف) برای هر دو مجموعه  $A$  و  $B$ ، یا  $A \subseteq B$  یا  $B \subseteq A$

ب) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، همنهشت هستند.



### تمرین

۱- می‌دانیم که از یک نقطه خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

۲- با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث  $ABC$ ،  $AB \neq AC$ ، آنگاه  $\hat{B} \neq \hat{C}$ .

۳- گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازه بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازه کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

۴- با استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی هر  $n$  ضلعی محدب برابر است با  $180^\circ \times (n-2)$ .

۵- نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) هر لوزی یک مربع است.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

پ) هیچ مثلثی بیش از یک زاویه قائمه ندارد.

ت) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر  $360^\circ$  است.

۶- عکس هر یک از قضایای زیر را نوشته و سپس آنها را به صورت یک قضیه دوشرطی بنویسید.

الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبرو به آنها نیز برابرند.

ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمود منصف یکدیگرند.

پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.