

# فصل دوم

## معادله درجه دوم

معادله و مسائل توصیفی **درس ۱**

حل معادله درجه ۲ و کاربردها **درس ۲**

معادلات شامل عبارتهای گویا **درس ۳**

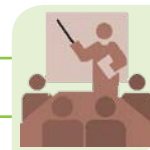

شرح شکل های فصل  
شرح شکل های فصل  
شرح شکل های فصل  
شرح شکل های فصل

# درس ۱

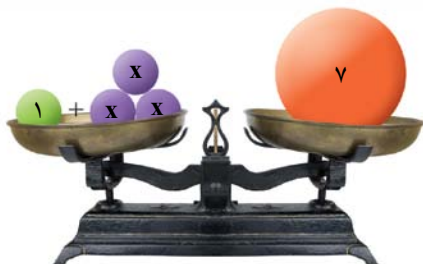
## ■ معادله و مسائل توصیفی ■

معادله  $4x + 2 = 10$  را در نظر می‌گیریم. این معادله به ازای  $x = 2$  به یک تساوی عدد تبدیل می‌شود.  $x = 2$  را جواب معادله یا ریشه معادله می‌نامند.

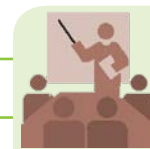
### فعالیت (۱)



با توجه به شکل زیر یک معادله طرح کنید و ریشه آن را بیابید.



### فعالیت (۲)



عددی را بیابید که دو برابر آن به علاوه عدد یک، برابر با پنج برابر همان عدد منهای چهار باشد.  
جواب: عدد مورد نظر را  $x$  در نظر می‌گیریم. با توجه به فرض:  
دو برابر آن عدد به علاوه عدد یک معادل  $2x + 1$  و پنج برابر همان عدد منهای عدد چهار معادل  $5x - 4$  است که باید با یکدیگر برابر باشند یعنی:

$$2x + 1 = \dots\dots\dots$$

با بردن جملات شامل  $x$  به یک طرف تساوی و بردن اعداد ثابت به طرف دیگر تساوی:

$$5x - 2x = 1 + 4 \Rightarrow 3x = 5$$

و با تقسیم هر طرف تساوی بر عدد سه جواب معادله به دست می‌آید:

$$x = \frac{5}{3}$$

هر معادله به صورت  $ax+b=0$  را که در آن  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی و  $a$  مخالف صفر است را یک معادله درجه اول می نامند. جواب این معادله از  $x = -\frac{b}{a}$  به دست می آید. (چرا؟)

## کار در کلاس



یک حواصیل خاکستری دسته ای از حواصیل های سفید را در جنگل حرا\* در جزیره قشم دید. به یکی از آنها گفت: اجازه می دهید من هم در گروه شما باشم و با شما پرواز کنم؟



یکی از آنها پاسخ داد: اگر معمای زیر را حل کنی تو هم در گروه ما خواهی بود و ادامه داد:  
 «ما و ما و نصف ما و نصفه ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، جملگی صد می شویم.»  
 لطفاً به پرنده کمک کنید تا تعداد پرندگان گروه را تعیین کند و عضوی از گروه آنها باشد.  
 اگر «ما» را  $x$  فرض کنیم:

$$100 = 1 + \text{نصف نصف ما} + \text{نصف ما} + \text{ما} + \text{ما}$$

$$x + \dots + \frac{1}{2}x + \dots + 1 = 100$$

$$\dots \Rightarrow x = \dots$$

آیا معادله به دست آمده از درجه اول است؟ چرا؟  
 ضرایب  $a$  و  $b$  کدام اند؟

\* شرحی از موقعیت و شرایط این جنگل در صفحه بعد آمده است.

## \* جنگل حرا، جزیره قشم



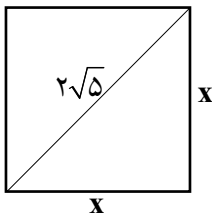
حرا درختی است که بیشتر در آب‌های جنوبی ایران می‌روید که در این میان جنگل‌های همیشه‌سبز دریایی حرا نمونه‌ای زیبا از این درختان است. این جنگل‌ها در حاشیه شمال غربی قشم از زیباترین گردش‌گاه‌هایی است که همچون نگینی در پهنه نیلگون خلیج فارس چشم‌ها را می‌نوازد و دوستداران طبیعت را به تماشای خویش فرا می‌خواند. این جنگل‌های سبز مامن بیش از ۲۲۰ پرنده بومی و مهاجر است. حواصیل سفید و خاکستری دو گونه زیبا از این پرندگان هستند.

## یادی از گذشته



### فعالیت کتاب نهم صفحه ۷۳

- محیط مربعی را به دست آورید که قطر آن  $2\sqrt{5}$  باشد.



به کمک رابطه فیثاغورث داریم:

$$\dots + \dots = (2\sqrt{5})^2$$

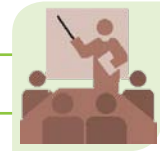
بنابراین:

$$2x^2 = \dots \Rightarrow x^2 = \dots \Rightarrow x = \dots$$

پس اندازه هر ضلع مربع با در نظر گرفتن این که اندازه ضلع مثبت است برابر  $x = \dots$  است.  
پس محیط مربع فوق برابر است با:

$$p = 4x \Rightarrow p = \dots$$

معادله  $2x^2 = 20$  را یک معادله درجه دوم می‌نامیم.



### فعالیت (۳)

۱. عددی را بیابید که مربع آن، ۳ برابر خود همان عدد باشد.  
 اگر عدد مورد نظر  $x$  فرض شود، مربع همان عدد برابر  $x^2$  و سه برابر همان عدد برابر  $3x$  است که باید دو عبارت با یکدیگر برابر باشند. یعنی:

$$\dots\dots\dots = 3x$$

جواب‌های این معادله را می‌توانید حدس بزنید؟ آیا این معادله بیش از یک جواب دارد؟  
 از میان مقادیر زیر کدام یک می‌تواند جواب معادله باشد؟ چرا؟

- $x=3$  ,  $x=4$  ,  $x=-3$  ,  $x=1$  ,  $x=0$
- 

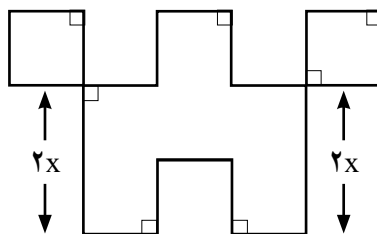
به جز روش حدس برای حل معادله فوق از روش تجزیه نیز می‌توانیم استفاده کنیم:

$$x^2=3x \Rightarrow x^2-3x=0, \quad x(x-3)=0 \Rightarrow x=0 \dots\dots\dots \text{ یا } x=3 \dots\dots\dots$$

اگر  $a \times b = 0$  نتیجه می‌گیریم  $a=0$  یا  $b=0$

معادله درجه دوم، معادله‌ای به شکل  $ax^2+bx+c=0$  است که در آن  $a \neq 0$  ضریب  $x^2$ ،  $b$  ضریب  $x$  و  $c$  عدد ثابت است.

۲. در شکل زیر طول تمام پاره‌خط‌ها به جز دو پاره‌خط مشخص شده در شکل برابر  $x$  است. اگر اندازه مساحت شکل برابر با اندازه محیط آن باشد. مقدار  $x$  را به دست آورید.



$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots \Rightarrow \text{اندازه محیط شکل} = \text{اندازه مساحت شکل}$$



## کار در کلاس

حسن از پسرعمویش یک سال بزرگ‌تر است. اگر حاصل ضرب سن‌های این دو برادر  $210^\circ$  باشد، برادر کوچک‌تر چند سال دارد؟

اگر سن حسن برابر  $x$  باشد، طبق فرض مسأله سن برادر حسن برابر ..... است. بنابراین:

$$x \times (\dots) = 210^\circ$$

آیا می‌توانید جواب‌های معادله فوق را حدس بزنید؟ این معادله از درجه چند است؟

این معادله چند جواب دارد؟ آیا عدد منفی هم در معادله صدق می‌کند؟ این جواب در این سؤال معنی دارد؟



## تمرین

- هرکدام از عبارت‌های زیر را به یک معادله تبدیل کنید.
  - الف) عددی را بیابید که پنج برابر آن به علاوه دو برابر با سه برابر آن عدد منهای دو باشد.
  - ب) مربع عددی برابر با همان عدد به علاوه عدد یک است.
- در یک کارخانه، حقوق یک مهندس، دو برابر یک تکنسین و  $\frac{2}{3}$  مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه ۳ مدیر بخش، ۸ مهندس و ۱۲ تکنسین دارد. مدیرعامل کارخانه برای این قسمت ماهیانه ۵۵/۵ میلیون تومان حقوق پرداخت می‌کند. حقوق یک تکنسین این کارخانه در ماه چقدر است؟
- با توجه به پیش‌بینی درخواست بازار آهن، کارخانه ذوب آهن اصفهان، از روز شنبه هر روز تولید خود را دو برابر کرده است. در پایان روز چهارشنبه فولاد به سقف ۱۲۸ هزار تن رسیده است. مجموع تولید فولاد در این پنج روز چقدر بوده است؟  
اختلاف تولید فولاد در پایان روز شنبه با تولید فولاد در پایان روز چهارشنبه چقدر است؟

## کارخانه ذوب آهن اصفهان

کارخانه ذوب آهن اصفهان به عنوان یک صنعت مهم و مادر، در ۱۳۴۶ در دشت طبس، واقع در ۴۵ کیلومتری جنوب غربی شهر اصفهان، تأسیس و در سال ۱۳۵۰ با ظرفیت محصولات فولادی ۵۵ هزار تن در سال، به بهره‌برداری رسید. این کارخانه هم‌اکنون با تلاش شبانه‌روزی پرسنل و کارمندان آن به ظرفیت تولید بیش از ۲ میلیون تن محصولات فولادی و محصولات متنوع دیگر رسیده است که کمکی شایان به ساختن زیربنای کشور عزیزمان ایران اسلامی دارد.

عکسی از کارخانه ذوب  
آهن اصفهان

۴. اگر در یک قالبی با ابعاد  $2/10\text{ m} \times 2/80\text{ m}$  (که عموماً  $3 \times 2$  نامیده می‌شود) تعداد گره‌های قالبی  $8/400/000$  عدد باشد:

الف) این قالبی چند رج<sup>۱</sup> است؟

ب) اگر برای هر گره  $1\text{ cm}$  نخ قالبی یا همان خامه قالبی استفاده شود، در این قالبی چند متر نخ قالبی استفاده شده است؟

ج) یک قالبی با فاصله ای در یک روز می‌تواند  $6000$  گره قالبی بیافد. اگر این قالبی با فاصله  $5$  روز در هفته کار کند برای اتمام این قالبی چند هفته باید کار کند؟

۱. «رج قالبی» عبارت است از تعداد گره‌های یک مربع  $7\text{ cm} \times 7\text{ cm}$ . به عنوان مثال منظور از یک قالبی  $50$  رج، وجود  $50$  گره در هر مربع به ضلع  $7\text{ cm}$  در قالبی است.

د) اگر این قالی باف برای خرید مواد اولیه قالی شامل تار و پود، نخ قالی و ... یک میلیون تومان هزینه کرده باشد و بتواند در پایان بافت قالی، آن را به قیمت ۴/۵ میلیون تومان بفروشد، این قالی باف برای هر هفته کار خود چه دستمزدی دریافت کرده است؟

### صنعت قالی بافی

یکی از قدیمی ترین و زیباترین هنرهای دستی مردم ایران، هنر قالی بافی است. در این حرفه به نخ‌های قالی با آن بافته می‌شود خامه قالی (خومه) می‌گویند. این نخ‌ها بر روی رشته‌های نخ افقی و قائمی بافته می‌شوند که به این رشته‌ها تار و پود قالی می‌گویند. عموماً ارزش یک قالی به اصالت نقشه آن، قدمت قالی، بافته قالی و تعداد گره‌های قالی و جنس تار و پود قالی است.

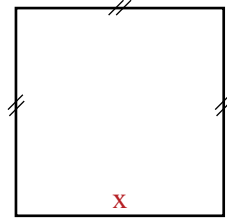
عکسی از  
نقشه یک قالی

عکسی از  
خامه قالی

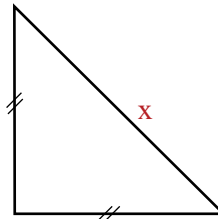
عکسی از  
تار و پود قالی



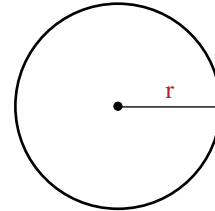
۵. اگر  $\frac{3}{4} =$  شکل (۳) + مساحت شکل (۲) + مساحت شکل (۱) باشد، طول ضلع مربع چقدر است؟



شکل (۱)



شکل (۲)



$$r = \frac{1}{8\pi} x$$

شکل (۳)

### بازی با حروف الفبا به کمک مدل سازی ریاضی (رمزنگاری)

۶. حروف الفبای فارسی از «الف» تا «ی» را به ترتیب از ۱ تا ۳۲ شماره گذاری کرده ایم. هر حرف بدون نقطه با شماره آن حرف از ۱ تا ۳۲ مشخص می شود. حروف نقطه دار به صورت  $ax^n$  مشخص شده اند که در آن  $a$  شماره حرف الفبا و  $n$  تعداد نقاط حرف مورد نظر است. به عنوان مثال حرف «ح» با عدد ۸ مشخص می شود. زیرا هشتمین حرف الفبای فارسی است و حرف «ت» با عبارت  $4x^2$  مشخص می شود زیرا چهارمین حرف الفبا است ( $a=4$ ) و دارای دو نقطه است ( $n=2$ ).

در این روش برای نوشتن کلمات از علامت جمع به صورت زیر استفاده می کنیم.

مثلاً برای معادل ریاضی کلمه «غنچه»:

$$\begin{array}{cccc} \text{غ} & + & \text{ن} & + & \text{چ} & + & \text{ه} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 31 & + & 7x^2 & + & 29x & + & 22x \end{array}$$

$$\text{معادل ریاضی غنچه} \rightarrow 22x + 29x + 7x^2 + 31$$

حال با توجه به توضیح فوق:

۱. جدول زیر را کامل کنید:

کلمه به زبان فارسی	مدل ریاضی معادل آن
آب	
	$3x^2 + 1$
ذرت	

۲. مدل ریاضی معادل کلمه «پیامبر رحمت» را مشخص کنید.
۳. آیا می‌توانید با این روش نام خود را با رمز ریاضی بیان کنید؟
۴. ...

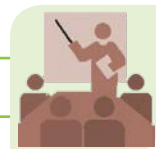
در حالت کلی ممکن است نتوانیم جواب‌های یک معادله درجه دو را حدس بزنیم. در ادامه با ۳ روش برای حل معادله درجه دو آشنا می‌شویم:



# درس ۲

## ■ حل معادله درجه ۲ و کاربردها ■

➡ روش اول : تجزیه عبارتهای جبری ➡



### فعالیت (۴)

مطابق نمونه، اتحاد جبری پیشنهادی در ستون اول که مناسب برای حل معادله درجه دوم در ستون بعدی است را با یک خط به یکدیگر وصل کنید. سپس معادله فوق را در ستون آخر حل نمایید. (منظور از حل معادله یافتن جوابهای معادله است.)

ستون اول	ستون دوم	ستون سوم
اتحاد مربع تفاضل دو جمله	$x^2 + 6x = 0$	$x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x+6) = 0$ $\Rightarrow x = 0$ یا $x = -6$ پس معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.
تجزیه	$x^2 + 6x + 9 = 0$	$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 = 0 \Rightarrow$ $(x+3)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3$ یا $x = -3$ چون دو ریشه معادله با یکدیگر برابرند می‌گوییم معادله دارای ریشه مضاعف $x = -3$ است.
اتحاد جمله مشترک	$x^2 - 16 = 0$	$x^2 - 16x = 0 \Rightarrow (x-4)(\dots) = 0$ (روش ۱) $\Rightarrow x = \dots$ یا $\dots$ $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow \dots$ (روش ۲)
اتحاد مربع مجموع دو جمله	$x^2 + 5x + 6 = 0$	$(x+3)(\ ) = 0$
اتحاد مزدوج و روش ریشه‌گیری	$x^2 + 6x + 9 = 0$	

با توجه به معادلات فوق در حالت کلی در معادله درجه دوم  $ax^2+bx+c=0$ .

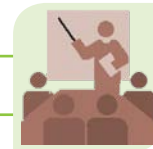
الف) اگر  $c=0$  از کدام روش بالا استفاده می کنید؟

ب) در چه صورتی از اتحاد مربع دو جمله ای استفاده می کنید؟

پ) برای حل معادله درجه دو به کمک اتحاد مزدوج یا ریشه گیری، ضریب  $b$  در چه شرطی صدق می کند؟ آیا علامت  $c$  مهم است؟

ت) در کدام یک از اتحادهای فوق جواب معادله ریشه مضاعف محسوب می شود؟

## فعالیت (۵)



آیا می توانید معادله درجه دومی بنویسید که جواب نداشته باشد؟ دو نمونه آن را مشخص کنید.

## تمرین



۱. معادلات درجه دوم زیر را به روش فاکتورگیری (تجزیه) یا اتحاد مربع دو جمله ای حل کنید.

الف)  $2x^2 - 8 = 0$       ب)  $(x+2)(x-3) = x-3$

پ)  $x^4 - 2x^2 = 0$       ت)  $x^2 + 4x - 5 = 0$

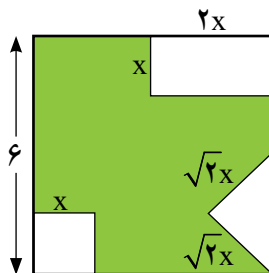
ث)  $x^2 = x - \frac{1}{4}$       ج)  $2x^2 - 8x = 0$

۲. معادلات زیر را به کمک اتحاد جمله مشترک یا اتحاد مزدوج حل کنید.

الف)  $x^2 - 5x + 6 = 0$       ب)  $x = \frac{3}{x}$

پ)  $x^2 = 5 - x^2$       ت)  $x^2 + 4x + 4 = 0$

ث)  $9x^2 + 3x - 2 = 0$       ج)  $(x-3)^2 = 4$



۳. از مربعی به ضلع  $6\text{cm}$  سه شکل روبه رو

بریده شده است. مساحت باقی مانده  $24\text{cm}^2$

است. طول ضلع کوچک بریده شده چقدر

است؟

۴. معادله درجه دومی بنویسید که  $x=2$  و  $x=-3$  جواب‌های آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

۵. معادله درجه دومی بنویسید که  $x=1$  ریشه مضاعف آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

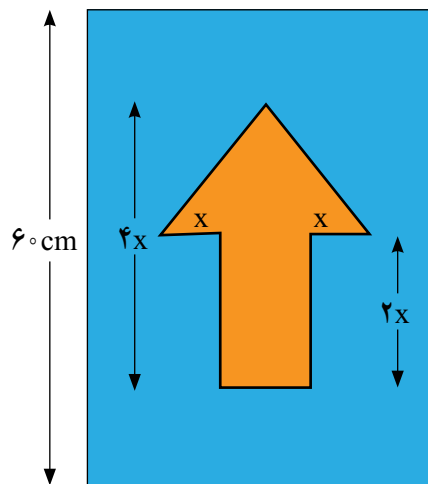
۶. در معادله  $(x-1)^2 = k$ :

الف) به ازای چه مقادیری از  $k$  معادله ریشه مضاعف دارد؟

ب) به ازای چه مقادیری از  $k$  معادله دو ریشه حقیقی دارد؟

پ) به ازای چه مقادیری از  $k$  معادله ریشه (حقیقی) ندارد؟

۷. برای ساخت تابلوی راهنمایی «یک طرفه» بر روی یک پل، مطابق شکل زیر از برجسب‌های آبی و سفید استفاده می‌شود. هزینه  $1 \text{ cm}^2$  برجسب سفید  $3^\circ$  تومان و هزینه  $1 \text{ cm}^2$  برجسب آبی  $1^\circ$  تومان است. مجموع هزینه برجسب‌های سفید و آبی  $60,000$  تومان شده است.



الف) اندازه  $x$  چقدر است؟

ب) اگر در تابلوی راهنمایی مطابق

شکل روبه‌رو از خطوط برجسب

شبرنگ زرد استفاده کنیم هزینه

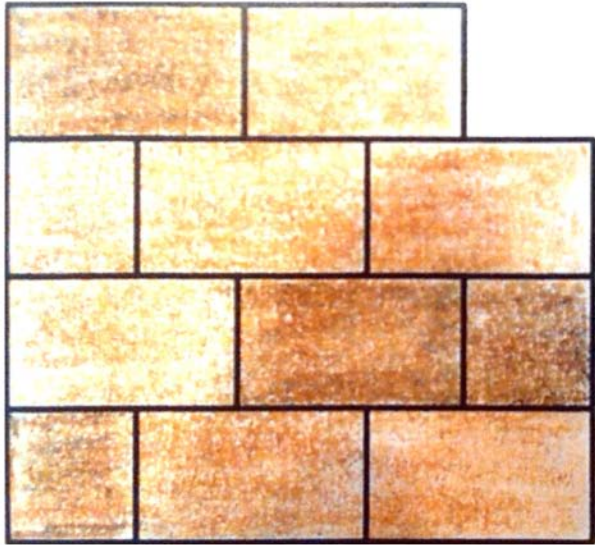
رنگ آمیزی تابلو  $80,000$  شده

است. در این حالت اندازه  $x$

چقدر است؟

➡ روش دوم : مربع کامل ➡

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$



◆ مثال : معادله درجه دوم  $2x^2 + 3x - 5 = 0$  را حل کنید.

۱- ابتدا قرینه عدد ثابت معادله، یعنی ..... را به دو طرف معادله اضافه می کنیم.

$$2x^2 + 3x = \dots \quad (1)$$

۲- اگر ضریب  $x^2$  مخالف ۱ باشد دو طرف معادله را به ضریب  $x^2$  تقسیم می کنیم. بنابراین، در معادله بالا دو طرف تساوی را بر عدد ..... تقسیم می کنیم :

$$x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2} \quad (2)$$

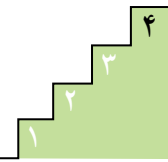
۳- در عبارت  $\frac{3}{2}x$  با در نظر گرفتن اتحاد مربع دو جمله ای  $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$  برای ایجاد

جمله  $2ab$ ، ضریب  $x$ ، یعنی  $\frac{3}{2}$ ، را در عدد ۲ ضرب و تقسیم می کنیم :

$$\frac{3}{2} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = 2 \times \frac{3}{4}$$

- سپس مربع عدد  $\frac{3}{4}$  را به دو طرف تساوی (۲) اضافه می کنیم :

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \quad (3)$$



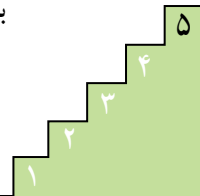
به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای سمت چپ تساوی (۳) را به  $(a+b)^2$  تبدیل می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = x^2 + 2 \times \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2$$

$\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$   
 $a^2$                        $b \times a$                        $b^2$                        $(a+b)^2$

بنابراین:

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{16} \rightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \quad (4)$$



با استفاده از ریشه‌گیری از ۲ طرف تساوی، مقدار  $x$  به دست می‌آید:

$$x + \frac{3}{4} = \pm \frac{7}{4} \Rightarrow x = -\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{یا} \quad x = -\frac{3}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$$

پس جواب‌های معادله  $2x^2 + 3x - 5 = 0$  یا همان ریشه‌های معادله، دو عدد حقیقی

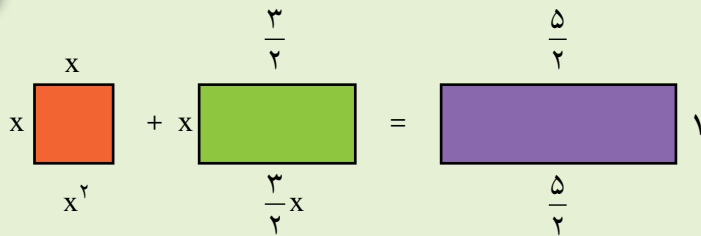
$x = -\frac{5}{2}$  و  $x = 1$  هستند.



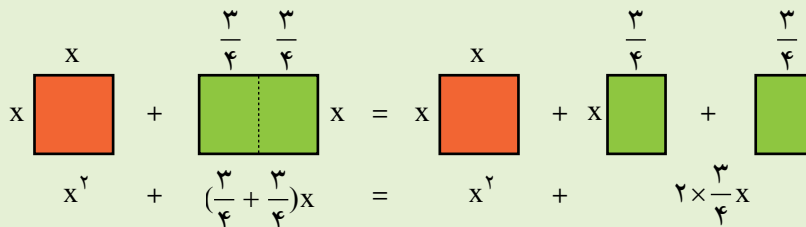
مراحل حل معادله ذکر شده از پله دوم به بعد را به کمک تعبیر هندسی

زیر نیز می‌توان بیان نمود:

- اگر  $x^2$  را مساحت مربعی به ضلع  $x$  و  $\frac{3}{2}x$  را مساحت مستطیلی به طول  $\frac{3}{2}$  و عرض  $x$  در نظر بگیریم:



- با نصف کردن مستطیل به طول  $\frac{3}{4}$  (۱) و تبدیل آن به دو مستطیل به طول ..... (۲):



و قرار دادن ۲ مستطیل فوق در کنار مربع  $x^2$ ، تساوی بالا به صورت زیر در می آید:

$$x^2 + x \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot x = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{5}{2} \left(x + \frac{3}{4}\right)$$

- شکل سمت چپ برای آنکه به یک مربع کامل تبدیل شود نیاز به مربعی به ضلع ..... دارد.

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$$

به اضافه کردن آن به ۲ طرف تساوی:

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} \left(x + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

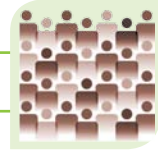
$$= \frac{5}{2} + \frac{9}{16} = \frac{49}{16}$$

که مطابق حل صفحه قبل معادله دارای ۲ جواب  $x=1$  و  $x=-\frac{5}{4}$  است. البته در روش هندسی فوق چون  $x$  طول ضلع است جواب  $x=-\frac{5}{4}$  معنی پیدا نمی کند.

ایده حل معادله درجه دو به روش هندسی ذکر شده اولین بار توسط ریاضی دان، منجم، مورخ و جغرافی دان ایرانی و مسلمان «ابوعبدالله محمد بن موسی خوارزمی» در کتاب جبر و مقابله در بخش اول کتاب در اواخر قرن دوم هجری مطرح گردید. سؤال قبل که صورت کلی آن  $x^2 + px = q$  و با فرض  $p, q > 0$  است، یکی از شش حالت خاصی است که خوارزمی برای حل معادله درجه دو در این کتاب مطرح و حل کرده است. هر چند همه معادلات درجه دوم را نمی توان با این شش روش حل کرد اما بیان مسائل هندسی در قالب جمله های جبری در این کتاب بنای اصلی توسعه نظریه جبری معادلات است. کتاب جبر و مقابله خوارزمی قرن ها مرجع و مأخذ اروپاییان و تا قرن شانزدهم میلادی مبنای مطالعات علمی آنان بوده است. این کتاب که به زبان عربی نوشته شده است در قرن ۱۲ میلادی دوباره توسط «جرارد کرمونی» و «رابرت چستری» به زبان لاتین ترجمه شده که این ترجمه ها را می توان آغاز علم جبر در اروپا دانست. همچنین در سال ۱۸۳۱ میلادی نیز «فردریک رزن» این کتاب را بار دیگر از زبان عربی به زبان انگلیسی ترجمه کرده است. لازم به ذکر است که یک نسخه خطی این کتاب در دانشگاه آکسفورد و نسخه خطی دیگر آن در قاهره موجود است.



## مسابقه



با محاسبه مجموع زمان طی کردن پله‌های زیر برای مراحل حل معادله درجه دو در چند ثانیه می‌توانید به بالای پله برسید؟ بهترین نتیجه به دست آمده در کلاس چند ثانیه با عملکرد شما اختلاف دارد؟

### تمرین قبل از مسابقه

$$1) 2x^2 - 6x - 1 = 0$$

$2x^2 - 6x = 1$	$x^2 - 3x = \frac{1}{2}$	$x^2 - 3x = \frac{1}{2}$	$(x - \frac{3}{2})^2 = \frac{11}{4}$	$x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$
		$\frac{x^2 - 3x = \frac{1}{2}}{x^2 - 3x = \frac{1}{2}}$		$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2} \\ x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2} \end{cases}$
		$\frac{(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}}{x^2 - 2(\frac{3}{2}x) + \frac{9}{4} = \frac{1}{2} + \frac{9}{4}}$		

## ← مسابقه →

$$3x^2 - 2 = 6x$$

## تمرین



معادلات درجه دو زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل کنید.

(ب)  $9x^2 + 3x - 2 = 0$

(الف)  $x^2 - 5x + 6 = 0$

(پ)  $x^2 + 6x + 9 = 0$

(پ)  $x^2 + \frac{1}{4} = -x$

## ← روش سوم : روش کلی حل معادله درجه دوم →

با استفاده از روش کامل مربع برای حل معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  روش کلی برای حل معادله به دست می آوریم. با مرور پله های گفته شده در بخش قبل :

۱- قرینه عدد ثابت معادله را به دو طرف معادله اضافه می کنیم :

$$ax^2 + bx = -c \quad (1)$$

۲- دو طرف معادله را به ضریب  $x^2$  یعنی  $a$  تقسیم می کنیم :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad (2)$$

۳- ضریب  $\frac{b}{a}$  را در عدد ۲ ضرب و تقسیم می کنیم و مربع عدد به دست آمده یعنی  $\frac{b}{2a}$  را به دو طرف تساوی (۲) اضافه می کنیم :

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x = -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \quad (3)$$

عبارت سمت چپ تساوی (۳) را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم:

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

با شرط  $b^2 - 4ac > 0$  و با استفاده از ریشه‌گیری از طرف تساوی:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

عبارت  $b^2 - 4ac$  را مبین معادله درجه دوم می‌نامند و آن را با  $\Delta$  نشان می‌دهند. براساس علامت  $\Delta$  می‌توان در وجود و تعداد ریشه‌های معادله درجه دوم اظهار نمود.

الف) اگر  $\Delta > 0$  باشد معادله دارای ۲ جواب است که عبارتند از:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ب) اگر  $\Delta = 0$  باشد معادله دارای یک جواب است. (در این حالت این ریشه را ریشه مضاعف می‌نامند.)

$$x = -\frac{b}{2a}$$

پ) اگر  $\Delta < 0$  باشد معادله جواب ندارد. (چرا)

## کار در کلاس



۱. جواب‌های معادله  $x^2 - 3x + 2 = 0$  را در صورت وجود به دست آورید.

■ حل: با توجه به ضرایب معادله به ترتیب:  $c=2$  و  $b=-3$  و  $a=1$  است.

بنابراین:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$

۱.  $\Delta$  چهارمین حرف الفبای یونانی است که آن را «دلتا» می‌خوانند. در الفبای یونانی، دلتای بزرگ را با علامت  $\Delta$  و دلتای کوچک را با علامت  $\delta$  نشان می‌دهند.

$\Delta > 0$  پس معادله دارای ۲ جواب است :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \quad x=2 \text{ یا } x=1$$

۲. جواب‌های معادله  $4x^2 + 7x - 2 = 0$  را در صورت وجود به دست آورید.

■ حل : با در نظر گرفتن  $a = \dots$   $b = \dots$   $c = \dots$

$$\Delta = \dots \Rightarrow \Delta = 49 - 4 \times 4 \times (-2) = 18$$

$\Delta > 0$  و معادله دارای دو جواب است :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{18}}{2 \times 4} = \dots$$

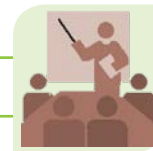
۳. جواب‌های معادله  $3x^2 + x + 7 = 0$  را در صورت وجود به دست آورید.

■ حل : با در نظر گرفتن  $a = 3$   $b = 1$   $c = 7$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = \dots$$

$\Delta < 0$  بنابراین معادله ریشه حقیقی ندارد.

## فعالیت (۶)



معادله  $3x^2 - 5x - 2 = 0$  را حل کنید و با به دست آوردن ریشه‌های معادله  $1x$  و  $2x$  حاصل  $1x + 2x$  را به دست آورید. آیا ارتباطی میان مجموع ریشه‌ها و ضرایب  $a, b, c$  در معادله درجه دو گفته شده وجود دارد؟

■ حل : با توجه به  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  داریم :

$$x = \frac{+5 \pm \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{+5 \pm 7}{6}$$

$$x = \frac{+5+7}{6} \quad x_1 = \frac{+5+7}{6} = 2 \quad x_2 = \frac{+5-7}{6} = \frac{1}{3}$$

پس :

$$x_1 + x_2 = \frac{-1}{3} + 2 = \frac{+5}{3}$$

با توجه به نسبت  $-\frac{b}{a}$  در معادله که برابر مقدار  $\frac{5}{3}$  است می‌توان حدس زد که ممکن است حاصل  $x_1 + x_2$  در یک معادله درجه دو همواره برابر با  $-\frac{b}{a}$  باشد.

## طرح و حل چند مسائل کاربردی از معادله درجه دو

### مسئله اول :

مقدمه : در هر مسئله اقتصادی اگر  $x$  مقدار یا تعداد محصول باشد سه تابع مهم زیر تعریف می شوند :

تابع هزینه (cost) یا  $C(x)$  : هزینه تولید  $x$  واحد کالا

تابع سود (profit) یا  $R(x)$  : سود حاصل از فروش  $x$  واحد کالا

تابع درآمد (euneveR) یا  $R(x)$  : درآمد حاصل از فروش  $x$  واحد کالا

رابطه میان ۳ تابع فوق به صورت زیر است :

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow \text{هزینه} - \text{درآمد (فروش)} = \text{سود}$$

فرض کنید شما یک دوچرخه جدید طراحی کرده اید و پس از آزمایش ها و تأییدهای اولیه می خواهید اقدام به تولید انبوه این دوچرخه کنید. هزینه های شما شامل ۲ بخش هستند :

۱. هزینه اولیه شامل ۷۰۰ میلیون تومان برای خرید دستگاه های کارخانه و تبلیغات

۲. هزینه تولید که عبارت است از ۱۱۰ هزار تومان برای ساخت هر دوچرخه

اگر  $v$  ارزش قیمت یک دوچرخه باشد و تعداد فروش دوچرخه از رابطه  $700,000 - 200v$  به دست آید.

الف) تابع سود کارخانه را به دست آورید.

ب) سود کارخانه پس از تولید چند دوچرخه حاصل می شود؟

پ) آیا می توانید حدس بزنید با چه میزان تولید دوچرخه سود کارخانه max می شود؟

$$\text{درآمد } R(x) = \text{قیمت هر دوچرخه} \times \text{تعداد فروش دوچرخه} = (700,000 - 200v) \times v = 700,000v - 200v^2$$

$$\text{هزینه } C(x) = 700,000 + 110(700,000 - 200v) = 8,400,000 - 22,000v$$

$$\text{سود } P(x) = R(x) - C(x) = -200v^2 + 92,000v - 8,400,000$$

...



## مسأله دوم :

در یک کارگاه تولید چتر، سود حاصل از فروش  $x$  چتر از رابطه  $p(x) = -0.00405x^2 + 8.15x - 100$  می آید.

الف) اگر این کارگاه چتری نفروشد چقدر از دست می دهد؟

ب) نقطه سر به سر (break-even) میزانی از تولید یک بنگاه اقتصادی را نشان می دهد که در آن میزان هزینه ها با میزان درآمدها برابر می شود و بنگاه در این سطح از تولید نه سود می کند و نه ضرر. اگر تولید بیشتر از نقطه سر به سر باشد بنگاه سود خواهد برد و اگر کمتر باشد، زیان خواهد دید.

در مثال بالا به ازای چه تعداد فروش چتر، کارگاه به نقطه سر به سر خود می رسد؟ چندمین تولید چتر برای کارگاه سودآور است؟

پ) آیا می توانید حدس بزنید کارگاه به ازای فروش چند چتر بیشترین سود خود را کسب می کند؟

الف)  $-100$

ب)  $x_1 = 12/35$       $x_2 = 2/000$

ج)  $x = 1006/17 \Rightarrow \max p = 4/000$



## تمرین



۱. معادلات درجه دوم زیر را حل کنید.

$$2x^2 + x - 1 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + 17x - 18 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0 \quad (6)$$

$$x^2 - x + 5 = 0 \quad (1)$$

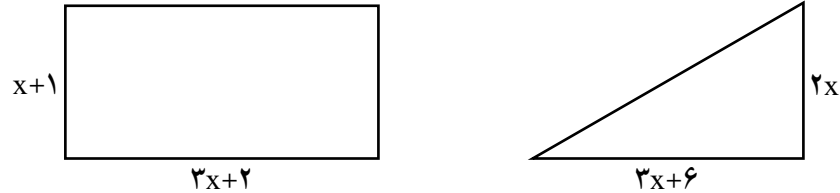
$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (3)$$

$$3x^2 - x + 4 = 0 \quad (5)$$

۲. معادله  $2x^2 - 3x - 5 = 0$  را به روش  $\Delta$  حل کنید. با محاسبه ریشه‌های  $x_1$  و  $x_2$  حاصل ضرب آنها را به دست آورید.

۳. اگر یکی از جواب‌های معادله  $7x^2 - ax + 35 = 0$  برابر ۴- باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟

۴. در زیر مساحت مثلث و مستطیل رسم شده مساوی هستند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟



۵. کدام یک از معادلات زیر به ازای هر مقدار  $a$  همواره دارای جواب‌های حقیقی است؟

الف)  $x^2 + ax - 1 = 0$       ب)  $x^2 - x + a = 0$

۶. نشان دهید در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر  $a+c=b$  باشد. یکی از ریشه‌های معادله برابر  $x = -1$  و دیگری  $x = -\frac{c}{a}$  است.

۷. در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  با تعیین ریشه‌های معادله نشان دهید حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم برابر  $\frac{c}{a}$  است.

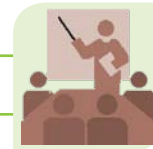
۸. نشان دهید در هر معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد ( $a+b+c=0$ ) یکی از ریشه‌های معادله  $x=1$  و دیگری  $x = \frac{c}{a}$  است.

\* حل تمرین‌های ستاره‌دار اجباری نیست.

# درس ۳

## ■ معادلات شامل عبارتهای گویا ■

### فعالیت



علی هر روز صبح با دوچرخه به مدرسه می رود، او از درب منزل تا سر خیابان اصلی را ۴ دقیقه رکاب می زند و از آن جا تا مدرسه مسافت ۲۵۰۰ متری را از مسیر ویژه دوچرخه سواری با سرعت متوسط ۱۵ کیلومتر بر ساعت طی می کند.

می خواهیم با انجام فعالیت زیر مدت زمانی را که طول می کشد علی از منزل به مدرسه برسد را محاسبه کنیم.

۱. دستور محاسبه سرعت متوسط  $v = \frac{x}{t}$  است که در آن  $v$  سرعت متوسط،  $x$  مسافت طی شده و  $t$  مدت زمان طی مسیر می باشد. داده های مسئله را در این دستور جایگزین کنید.

۲. برابری  $15 = \frac{2500}{t}$  یک معادله شامل عبارت گویا  $\frac{2500}{t}$  است. از آن جا که  $t \neq 0$ ، پس معادله با معنی است، برای حل این معادله، دو طرف را با ۱۵- جمع کنید.

۳. با مخرج مشترک گیری سمت چپ معادله را به صورت یک کسر بنویسید.

۴. کسری که مخرج آن مخالف صفر است، فقط وقتی برابر با صفر می شود که صورت آن صفر شود، بنابراین صورت کسر بالا را برابر با صفر قرار دهید.

۵. از این جا به بعد یک معادله یک مجهولی درجه اول به دست می آید، آن را حل کنید و مقدار  $t$  را محاسبه نمایید.

۶. مدت زمان رسیدن علی از منزل تا مدرسه چقدر است؟

برای حل معادله های شامل عبارتهای گویا، ابتدا با توجه به خاصیت های معادله و مخرج

مشترک گیری، معادله ای نظیر  $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$  به دست می آید. با شرط این که  $Q(x) \neq 0$ ، وقتی معادله جواب

دارد که  $P(x) = 0$ ، سپس ریشه های این معادله را به دست می آوریم. از بین ریشه های به دست آمده،

آنهایی را قبول می کنیم که مخرج کسر  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  را صفر نکنند. (چرا؟)



◆ مثال: معادله  $\frac{1}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} = 2$  را حل کنید.

■ حل: با اضافه کردن ۲- به دو طرف معادله خواهیم داشت:

$$\frac{1}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - 2 = 0$$

اکنون با مخرج مشترک گیری از سمت چپ تساوی آن را به صورت یک کسر بنویسید.

$$\frac{1}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - \frac{2(\quad)}{(\quad)} = 0 \Rightarrow \frac{\quad}{x-3} = 0$$

مشاهده می کنیم که به معادله ای نظیر  $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$  رسیدیم، بنابراین با شرط  $x-3 \neq 0$  و با حل معادله  $P(x) = 0$ ، ریشه های معادله را در صورت وجود پیدا می کنیم.

$$21 - 7x = 0 \Rightarrow x = 3$$

چون  $x=3$  مخرج کسرها را صفر می کند، بنابراین، این ریشه قابل قبول نیست و معادله ریشه ندارد.

◆ مثال: معادله  $\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} = \frac{x^2-6x+5}{x^2-x-2}$  را حل کنید.

$$\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} - \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)(\quad)}{(x-5)(\quad)} + \frac{(x-1)(\quad)}{(x+4)(\quad)} - \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\quad}{(x-5)(x+4)} = 0 \Rightarrow \dots\dots\dots = 0$$

◆ مثال: به ازای چه مقدار  $a$  معادله  $\frac{a}{x} = \frac{x+1}{x+a}$  دارای جواب  $x=1$  است.

■ حل:  $x=1$  را در معادله قرار می دهیم و سپس مقدار  $a$  را به دست می آوریم.

$$x=1 \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{2}{a+1} \Rightarrow \frac{a}{1} - \frac{2}{a+1} = 0 \Rightarrow \frac{a(a+1)}{a+1} - \frac{2}{a+1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+a-2}{a+1} = 0 \Rightarrow a^2+a-2 = 0 \Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases}$$

چون  $a=1$  یا  $a=-2$  مخرج کسرها را معادله  $\frac{a}{1} - \frac{2}{a+1} = 0$  را صفر نمی کنند، پس هر دو قابل قبول اند.

## کار در کلاس



معادله‌های زیر را حل کنید.

الف)  $1 + \frac{1}{x^2} = \frac{4}{x}$

ب)  $\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$

پ)  $\frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$

ت)  $\frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y}$

ث) به ازای چه مقدار  $a$ ، معادله  $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$  دارای جواب  $x=2$  است.

### چند مسئله کاربردی از معادلات شامل عبارت‌های گویا

۱. گلدانی نقره داریم که نسبت وزن نقره خالص به وزن مس خالص آن، برابر با ۸ است. استاد قلمکار آن را ذوب و ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کرد و گلدان جدیدی ساخت. می‌دانیم  $\frac{4}{5}$  وزن گلدان جدید، نقره است. این گلدان قبل از ذوب شدن چه وزنی داشته است.

■ **حل:**  $8 = \frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن مس}}$ ، چنانچه وزن مس را برابر با  $x$  در نظر بگیریم، آن‌گاه وزن نقره  $8x$  و وزن گلدان

قبل از ذوب شدن برابر با  $8x+x=9x$  است.

اکنون اگر بعد از ذوب شدن ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کنیم، وزن گلدان جدید  $9x+100$  است.

از آنجا که  $\frac{4}{5}$  وزن گلدان جدید نقره است، یعنی  $\frac{4}{5} = \frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن گلدان جدید}}$ ، پس داریم:

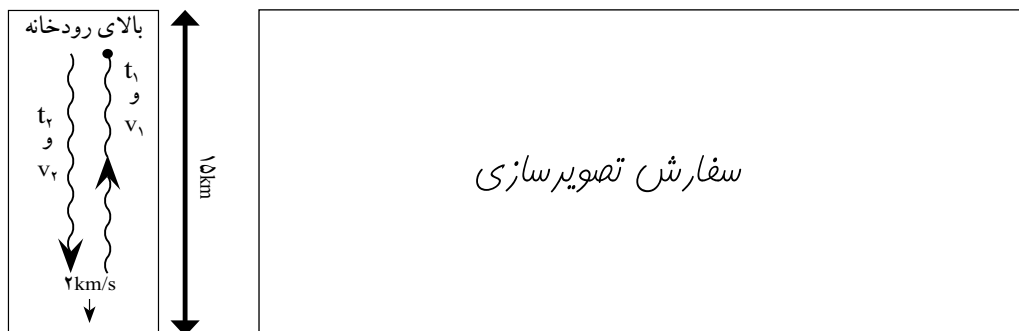
$$\frac{8x}{9x+100} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{8x}{9x+100} - \frac{4}{5} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{8x \times 5}{(9x+100) \times 5} - \frac{4(9x+100)}{5(9x+100)} = 0 \Rightarrow \frac{40x - 36x - 400}{5(9x+100)} = 0 \quad (\text{با شرط } 9x+100 \neq 0)$$

$$4x - 400 = 0 \Rightarrow x = 100$$

از آن‌جا که وزن گلدان قبل از ذوب شدن  $9x$  است در نتیجه وزن گلدان قبل از ذوب شدن برابر با ۹۰۰ گرم است.

۲. قایق‌های تفریحی در رودخانه کارون در شهر اهواز مسافران را در یک گردش سه‌ساعته ۵ کیلومتر برخلاف جریان آب به بالای رودخانه می‌برند و سپس برمی‌گردانند. اگر سرعت آب از بالا به پایین  $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  باشد، سرعت ثابت قایق تفریحی (در آب ساکن) چقدر است؟ مدت زمانی که قایق در خلاف جهت آب رودخانه حرکت می‌کند چقدر است؟



■ حل: فرض کنیم سرعت ثابت قایق در آب ساکن  $v$  باشد. در این صورت با توجه به محل داریم:

$$v_1 = v - 2, v_2 = v + 2$$

اگر در مدت زمان  $t_1$  قایق به بالا رودخانه برود و در مدت زمان  $t_2$  از بالای رودخانه به شکل اولیه بازگردد، خواهیم داشت:

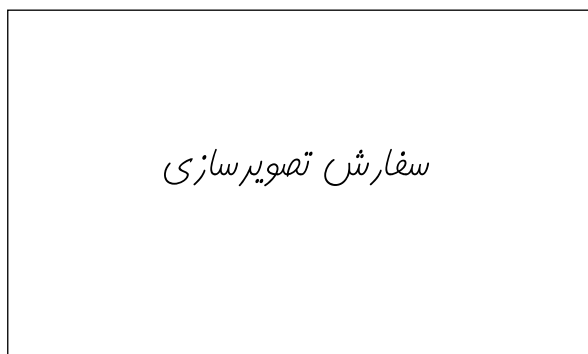
$$t_1 + t_2 = 3 \text{ ساعت}$$

از آنجا که  $x = vt$  یا  $t = \frac{x}{v}$ ؛ بنابراین:

$$t_1 + t_2 = 3 \Rightarrow \frac{x}{v_1} + \frac{x}{v_2} = 3 \Rightarrow \frac{15}{v-2} + \frac{15}{v+2} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{15}{v-2} + \frac{15}{v+2} - 3 = 0 \Rightarrow \frac{15}{v-2} + \frac{15}{v+2} - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{15(v+2) + 15(v-2) - 3(v-2)(v+2)}{(v-2)(v+2)} = 0 \Rightarrow \dots = 0$$



۳. یک کیک را بین چند نفر تقسیم کردیم و به هر یک مقدار مساوی رسید، سپس یک نفر دیگر به جمع آن اضافه شد و دوباره کیک را بین آنها تقسیم کردیم. در این مرحله به هر یک به اندازه  $\frac{1}{6}$  کمتر رسید، مشخص کنید در ابتدا چند نفر بوده‌اند.

۱. این مسأله اقتباس از کتاب جبر و مقابله خوارزمی است که در آن کتاب به جای کلمه (کیک)، درهم آمده است.

■ حل : فرض کنید در ابتدا  $n$  نفر بودند، بنابراین به هریک  $\frac{1}{n}$  کیک رسید، در مرحله بعد به هریک  $\frac{1}{n+1}$  کیک رسید، از آنجا که در این مرحله به هریک  $\frac{1}{6}$  کمتر رسیده است، خواهیم داشت :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{6}$$

با حل این معادله  $n=2$  به دست می آید.

## تمرین



معادله‌های زیر را حل کنید.

$$۱) \frac{3x-5}{x+3} = 1$$

$$۲) \frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$$

$$۳) \frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3$$

$$۴) \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$۵) \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2}$$

$$۶) \frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2}$$

۷. یک قایق تفریحی ۳۶ کیلومتر به طرف بالای رودخانه می رود و سپس برمی گردد. اگر اختلاف زمان بین رفت و برگشت  $\frac{1}{6}$  ساعت و سرعت جریان آب رودخانه ۴ کیلومتر بر ساعت باشد در این صورت سرعت ثابت قایق (در آب ساکن) چقدر است؟

۸. مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی برابر  $\frac{5}{12}$  است، آن دو عدد را پیدا کنید.

۹. هنگامی که دو چاپگر با هم کار می کنند، فیش حقوق کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می شود. چنانچه چاپگر قدیمی تر به تنهایی برای این کار ۳ ساعت زمان بیشتر نسبت به چاپگر جدیدتر نیاز داشته باشد، در این صورت هر کدام از چاپگرها به تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می کنند.

۱۰. به ازای چه مقدار  $k$ ، معادله  $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68}$  دارای جواب  $t=-3$  است.